Gabarito do 7º Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis:

Seja uma transformação linear T: $R^2 \to R^2$

Definição 1: Dizemos que um vetor não nulo v é um autovetor de T se existe um número real λ tal que $T(v) = \lambda v$. Em tal caso, dizemos que λ é o autovalor associado ao autovetor v. Observe que se v é um autovetor, então σv, $\sigma \neq 0$, também é um autovetor com o mesmo autovalor associado: $T(\sigma v) = \sigma T(v) = \sigma\lambda v = \lambda(\sigma v)$.

Definição 2: Dizemos que $p(\lambda) = \det(T - \sigma I)$ é o polinômio característico de T, onde I é a matriz identidade.

Enunciados a demonstrar

1) Prove que cada raiz real do polinômio característico $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ é um autovalor de T.

Demonstração:

Como $\det(T - \lambda I) = 0$ o sistema $(T - \lambda I)(x, y) = (0, 0)$, admite solução não trivial.

Seja $v \neq 0$ uma solução.

Então, $(T - \lambda I)(v) = 0 \Rightarrow T(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow T(v) = \lambda v$.

Logo v é um autovetor com autovalor associado λ.

2) Prove que para um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \sigma v$, então σ é uma raiz do polinômio caracteristico de T.

Demonstração:

Seja $(T - \sigma I)(v) = 0$, portanto a transformação linear $(T - \sigma I) = 0$, assim σ é uma raiz do polinômio característico $p(\lambda)$.