8/10/12 — Notas de aula

(*) $(x+1)^2 = x^2 + 1$ equação ou identidade

- se for equação → vamos procurar um x:

$$(x+1)^2 = x^2+1$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

Logo existe x $(x=0)$ que satisfaz (*)
Logo, (*) é verdadeira para $x=0$.

- se for identidade, é falso

Por exemplo, se $x=1$ temos:

$$\left.\begin{array}{c} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4 \\ \text{e} \\ x^2+1 = 1^2+1 = 2 \end{array}\right\} \neq 0.$$

A diferença que torna (*) verdadeira ou falso é o quantificador

existe x ou para todo x

[$\exists x$ tal que (*)] [$\forall x$ vale (*)]

Os quantificadores são muito importantes!

Aula 8/10/2020

$|a-b| < \varepsilon \Rightarrow a=b$ $(**)$

sem nenhum quantificador, não é possível provar a implicação:

Poderíamos ter $\begin{cases} a=1 \\ b=1{,}01 \\ \varepsilon=0{,}1 \end{cases}$ vale $|a-b|<\varepsilon$ e $a\neq b$

$|a-b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon>0$ $\Rightarrow a=b$] isto é verdade!

Demonstração.

Suponha, por absurdo, $a\neq b$.

Logo $|a-b| = c > 0$.

Escolho $\varepsilon_0 = \frac{c}{2}$.

Não vale $|a-b| < \varepsilon_0$

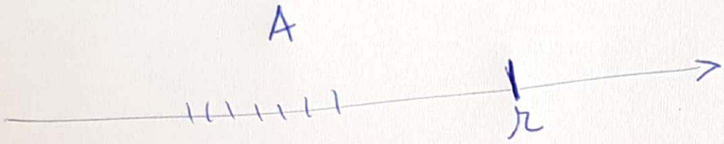
o que é uma contradição.

Logo. $a=b$.

- Uso de nomenclatura <u>adequada</u> para expressar as ideias!

qual? → a que foi estabelecida previamente (definições)

<u>Por exemplo</u>



Se $a \leq r, \forall a \in A$ então r é

- majorante de A
- cota superior de A
- limitante superior de A.

Qualquer outra expressão irá dificultar o entendimento.

Demonstrações

etapas:

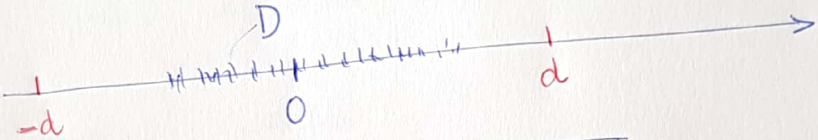
- entender o enunciado (ideias)
- fazer rascunhos com possíveis situações particulares para depois tentar generalizar
- roteiro das etapas da demonstração
- preencher os detalhes

Lista 2 - Exercício 8

Mostre que

D é um conjunto limitado $\iff$ existe $d > 0$ tal que $|x| \leq d$, $\forall x \in D$

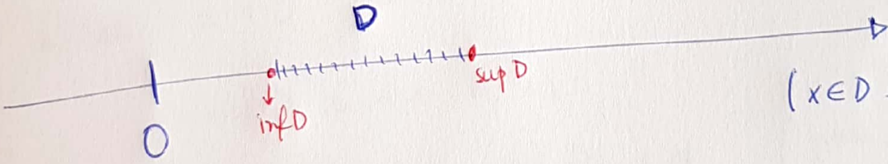
- entender a ideia e possíveis situações:
  - lembrar que $|x|$ é a distância de x até 0 !



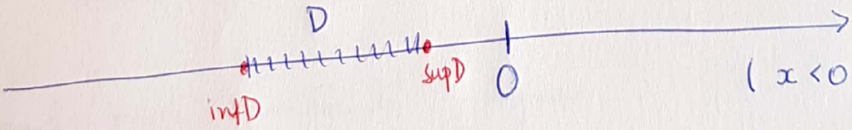
$$\boxed{|x| \leq d \iff -d \leq x \leq d}$$

(Tem que saber isto de cór para não perder tempo!)

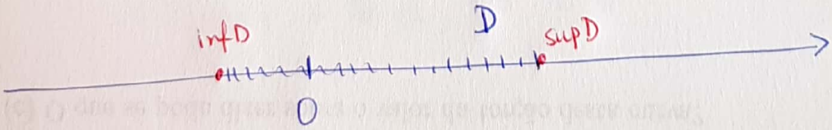
Possíveis situações

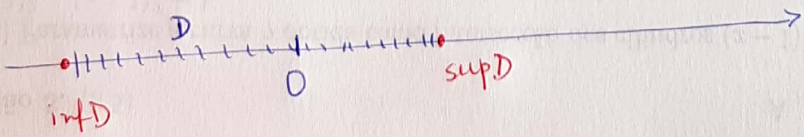


$(x \in D \Rightarrow x \geq 0)$



$(x < 0, \ \forall x \in D)$





Palpite : $d = \max \{\sup D, -\inf D\}$ } Tem que provar que funciona!

⑥

O exercício pede para demonstrar uma <u>equivalência</u>.

$\Rightarrow$) D é limitado $\Longrightarrow$ existe $d > 0$ tal que $|x| \leq d$, $\forall x \in D$.

Seja $d = \max\{\sup D, -\inf D\}$

Tome $x \in D$ qualquer

Sabemos que $\inf D \leq x \leq \sup D$, $\forall x \in D$.

(pois $\sup D$ é um majorante de D e $\inf D$ é um minorante de D)

• se $x \geq 0$ então

$$\underbrace{(0 \leq) x}_{= |x|} \leq \underline{\sup D \leq d}.$$

já que d é o maior entre $\sup D$ e $-\inf D$

Logo, $|x| \leq d$.

• se $x < 0$ então

$$-\inf D \geq -x = |x|$$

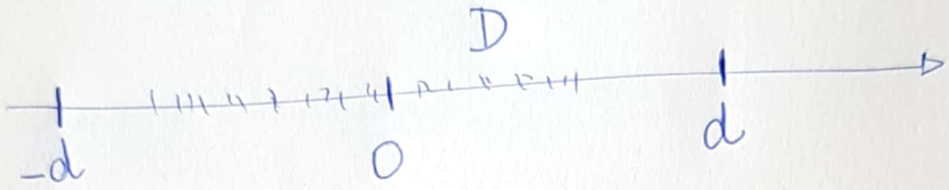
Portanto, $|x| \leq \underline{-\inf D \leq d}$ (pois d é o maior...)

Concluímos, portanto, que

$$|x| \leq d, \forall x \in D$$

Recíproca:

$\exists\, d > 0$ tal que $|x| \leq d,\ \forall x \in D \implies D$ é limitado.



Se existe tal d, temos

$$-d \leq x \leq d, \quad \forall x \in D$$

Portanto, d é um majorante do conjunto D

e $-d$ é um minorante do conjunto D.

e D é limitado.

cqd

$A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente

Como provar que um número s é o supremo de A?

$$s = \sup A$$

São sempre duas etapas.

1. provar que s é um majorante de A

   ($\iff \quad a \le s, \ \forall a \in A$)

2. provar que s é o menor majorante de A

$$\Updownarrow$$

se $m < s$ então m não é majorante de A

$$\Updownarrow$$

($m = s - \varepsilon$) se $\varepsilon > 0$ então $s - \varepsilon$ não é majorante de A

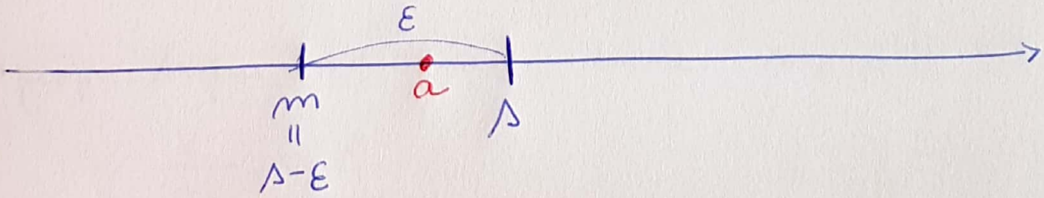
$\downarrow$

o que significa provar isso?

$\rightsquigarrow$ tem que encontrar algum $a \in A$ tal que

$$a > m$$

$$(a > s - \varepsilon)$$



Lista 2 - Exercício 10

$$D = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \; : \; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left(= \left\{ 0,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \dots,\ \frac{1}{2}-1,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ \dots,\ \dots \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots\ \frac{1}{3}-1,\ \frac{1}{4}-1,\ \frac{1}{5}-1,\ \dots \right\} \right)$$

idéia de como são os elementos de D

Vamos provar que $-1 = \inf D$

(a) -1 é minorante de D $\quad (-1 \leq d,\ \forall d \in D)$

De fato:

$$-1 \underset{(i)}{\leq} \frac{1}{m} - 1 \underset{(ii)}{\leq} \frac{1}{m} - \frac{1}{n}, \quad \forall m, \forall n \in \mathbb{N}$$

(i): $\frac{1}{m} \geq 0, \ \forall m \in \mathbb{N}$

Logo, $\frac{1}{m} - 1 \geq 0 - 1, \ \forall m \in \mathbb{N}.$

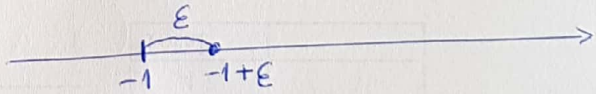
$\iff -1 \leq \frac{1}{m} - 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

(ii) $\frac{1}{n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \iff -\frac{1}{n} \geq -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\iff \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{m} - 1, \quad \forall m, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) -1 é o maior minorante de D.

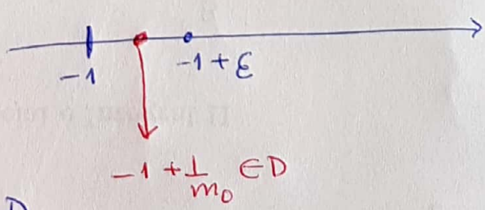
Tomo $\varepsilon > 0$ qualquer



Pela prop. Arquimediana, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{-1 + \frac{1}{m_0}}_{\substack{\in D \\ (\text{com } m = 1)}} < -1 + \varepsilon$$



Logo $-1+\varepsilon$ não é minorante de D

$\Rightarrow -1$ é o maior minorante de D.