MAC121 - Algoritmos e Estruturas de Dados I

Universidade de São Paulo

Segundo Semestre de 2020

Quicksort - caso médio

Quicksort aleatório

Quicksort - consumo de tempo

Como estimar o caso médio do Quicksort?

O que devemos contar?

```
if (v[i] < pivo)
```

Quantas destas comparações entre elementos do vetor são realizadas em média?

Seja X_{ab} o número de vezes que o item na posição a do vetor é comparado com o item na posição b no separa.

Com isso, se X é o número total de comparações,

$$X = \sum_{a=0}^{n-2} \sum_{b=a+1}^{n-1} X_{ab}.$$

Caso médio do Quicksort

Mas, quando os itens a e b são comparados? Apenas se a ou b se tornarem pivôs, e nenhum elemento no intervalo $[a, b]$ for pivô antes (pois dividiria os dois em intervalos diferentes).

Dessa forma, a ou b devem ser o primeiro pivô no intervalo $[a, b]$ para que $X_{ab} = 1$. Caso contrário, $X_{ab} = 0$.

Considerando que a sequência é aleatória, a chance de qualquer elemento ser o pivô é a mesma.

	a	$\dots$	b	

Temos $b - a + 1$ elementos neste intervalo!

Quicksort - caso médio

A probabilidade de que qualquer um desses elementos ser o pivô é a mesma:

$$\frac{1}{b-a+1}$$

Com isso,

$$Prob[X_{ab}=1]=\frac{2}{b-a+1}.$$

Podemos, agora, estimar o valor esperado de X, lembrando que

$$X=\sum_{a=0}^{n-2}\sum_{b=a+1}^{n-1}X_{ab}.$$

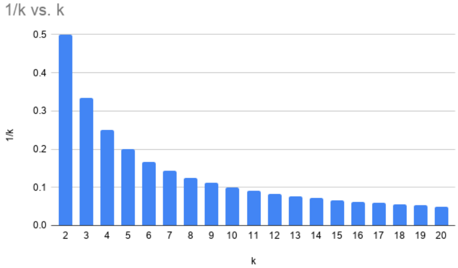
Quicksort - caso médio

Denotamos o valor esperado de X (esperança) por $\mathbf{E}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[\textstyle\sum_{a=0}^{n-2} \sum_{b=a+1}^{n-1} X_{ab}] \\
&= \textstyle\sum_{a=0}^{n-2} \sum_{b=a+1}^{n-1} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \textstyle\sum_{a=0}^{n-2} (\frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \dots \frac{2}{n-a}) \\
&= 2 \textstyle\sum_{a=0}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-a-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Quicksort - caso médio

Observe a soma $\sum_{k=1}^{n-a} \frac{1}{k+1}$:



Sabemos que a soma é limitada pela área sob a curva...

$$\sum_{k=1}^{n-a} \frac{1}{k+1} \leq \int_2^{n-a} \frac{1}{x} dx = \ln(n-a) - \ln 2 \leq \ln n.$$

Quicksort - análise de caso médio

Assim,

$$2\sum_{a=0}^{n-2}\sum_{k=1}^{n-a-1}\frac{1}{k+1} \leq 2\sum_{a=0}^{n-2}\ln n \leq 2n\ln n.$$

No caso médio, o Quicksort é um algoritmo $O(n\log n)$. Mas, no pior caso, $O(n^2)$.

Quicksort aleatório

Mas, como evitar cair no pior caso?

Uma ideia é sortear o pivô. Antes da chamada do separa, sorteie um índice no intervalo e troque com o primeiro elemento.

Esta versão aleatória do Quicksort ainda pode cair no pior caso, mas a chance disso ocorrer é muito pequena!!

Para saber mais...

- Material sobre Quicksort (P. Feofiloff)
- Livro texto, capítulo 11
- Animação do algoritmo