MAT0234 Medida e Integração
Segundo Semestre de 2020
Aula 11

Na aula passada vimos o Lema de Fatou, que tem importancia por si, e é utilizado em temas de probabilidade.
E também que toda função Riemann Integrável em [a,b] é Lebesgue Integrável e as integrais coincidem. Logo a Integral de Lebesgue generaliza a Integral de Riemann.
Além das funções Riemann integráveis como a Integral de Lebesgue podemos integrar muitas mais funções: funções ilimitadas e funções cujo suporte tem medida infinita, funções descontínuas em todo ponto, etc. Por exemplo
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}};\ x \in [0,1]$ e
$h(x) = \dfrac{1}{x^2};\ x \geq 1.$
Vale lembrar que estas funções não são Riemann Integráveis, mas existem as integrais impróprias. Veremos mais sobre isto depois.
E também temos que se $f = g$ qtp, temos $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$. Por exemplo, tomando X=[0,1] se $f = x^2$ e g(x) = $\begin{cases} f(x); x \notin C, conjunto\ de\ Cantor \\ 2\ ; x \in C \end{cases}$
Também, a função de Dirichlet, é Lebesgue Integrável e descontínua em todo ponto.

Exercício. Seja $f \in M^+(X, \mathcal{A}, \mu)$. Então a função de conjunto dada por $\lambda\,(E) = \int_E f\, d\mu\ \forall\, E \in \mathcal{A}$ é uma medida.
Verifiquemos a σ-aditividade. Seja $\{E_k\}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis disjuntos 2 a 2.
Definamos $f_n = \sum_1^n f\, \chi_{E_k}$. É uma sequência em M^+, que converge monotonamente para f.
Pelo Teorema da Convergência Monótona, ou
$\int_{\cup_1^\infty} f\, d\mu = \sum_1^{+\infty} \int_{E_k} f\, d\mu = \sum_1^{+\infty} \lambda\,(E_k)\ \square$.
Como λ é uma medida, podemos expressar a integral de f utilizando as propriedades de σ-aditividade, incluindo a continuidade para acima e a continuidade para abaixo. Note que a σ-álgebra que corresponde a λ é também a de μ.

Definição 0.1. Sejam λ *e* μ como acima. Então λ é uma **integral indefinida** de f. Às vezes escreve-se $d\lambda = f\, d\mu$. A recíproca será dada pelo Teorema e Radon-Nikodym, que não veremos.

Esta definição estende a ideia de integral indefinida como função, isto é, integrando somente em intervalos. Com efeito, para a integral de Riemann, a integral indefinida de uma função é $G(x) = \int_a^x f\, dx$.
Mostre que temos $\int g\, d\lambda = \int g\, f\, d\mu$, iniciando pela aplicação na fórmula para funções simples.

Exemplo. Se tomarmos $f = 3x^2$ temos que $\lambda(a,b) = (b^3 - a^3)$. Às vezes a função f denomina-se "peso", "densidade",etc.

Vamos estudar agora **Funções Integráveis**, isto é, funções com $\int f\, d\mu < +\infty$.

Proposição 1. *Seja* $f \in M$. *Então* $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.

Proposição 2. *Seja* $f \in M$, *a valores complexos. Então* $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.

Proposição 3. *Seja* $f \in M$. *Então f integrável se e somente se* $|f|$ *integrável.*

Definição 0.2. Uma medida μ se diz **σ-finita** se o conjunto X for união enumerável de conjuntos de medida finita.

Por exemplo, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é σ-finita. Com efeito, em $\mathbb{R}$ basta tomar $A_n = [-n, n]$ e $\mathbb{R} = \cup_1^{+\infty} A_n$. Análogamente $\mathbb{R}^2 = \cup_1^{+\infty} [-n, n] \times [-n, n]$, etc. Mas para o caso geral temos:

Proposição 4. *Seja* $f \in M^+$, *integrável. Então* $N(f) = \{f(x) > 0$ *é* σ*-finito.*

Dem: Definimos $B_n = \{\frac{1}{n} < f(x)\}$. Por Chebyshev temos $\frac{1}{n} \mu(B_n) \leq \int f \, d\mu$. Assim $\mu(B_n) < +\infty, \forall \, n \in \mathbb{N}$. Por último, observamos que $N(f) = \cup_1^{+\infty}(B_{n+1} - B_n)$, onde $\mu \, (B_{n+1} - B_n) < +\infty; \forall \, n \in \mathbb{N} \, \square$.
A Propriedade seguinte mostra que se f é integrável o "grosso"da integral está num conjunto de medida finita.

Proposição 5. *Seja* $f \in M^+$, *integrável. Logo existe E conjunto mensurável com* $\mu(E) < +\infty$ *tal que* $\forall \, \epsilon > 0$ *temos* $\int f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu + \epsilon$.

Comentário: A função pode ser integrável, mas ter valores muito grandes num conjunto de medida não nula. E também pode ter valores próximos de zero num conjunto de medida crescente quando os valores se aproximam de zero. Assim deveremos limitar a medida do conjunto para valores muito grandes de f e a medida do conjunto para valores muito pequenos, positivos.
Dem: Consideremos $A_n = \{n - 1 < f(x) \leq n\}$. Então $M = \int f \, d\mu = \sum_1^{+\infty} \int_{A_k} f \, d\mu$. Como a série é convergente, existe k_0 para o qual o "rabo"da série, $\sum_{k_0}^{+\infty} \int_{A_k} f \, d\mu$ é menor do que $\frac{\epsilon}{2}$.
Agora, definimos $B_n = \{\frac{1}{n+1} < f(x) \leq \frac{1}{n}\}$. Observamos que $A_1 = \cup_1^{+\infty} B_n$. Assim $\int_{A_1} f \, d\mu = \sum_1^{+\infty} \int_{B_n} f \, d\mu$. Como a série é convergente, existe k_1 para o qual o "rabo"da série, $\sum_{k_1}^{+\infty} \int_{B_n} f \, d\mu$ é menor do que $\frac{\epsilon}{2}$. Para ver que $\mu(B_n) < +\infty \, \forall \, n \in \mathbb{N}$, notamos que por Chebyshev temos $\frac{1}{n} \mu(B_n) \leq \int f \, d\mu$.
Assim podemos tomar $E = \cup_1^{k_0} A_k \cup_1^{k_1} B_n \, \square$.
Comentário: Observe que fazer partições *enumeráveis* no eixo das ordenadas facilita a demonstração destes resultados. Pense que para a Integral de Riemann, teríamos funções limitadas em intervalos fechados.

O Teorema seguinte é o terceiro dos 3 principais Teoremas de Convergência. Ele é talvez o mais famoso.

Teorema da Convergência Dominada:

Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida, e $f_n \in M$ uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função f, e $g : (X, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ uma função integrável com $|f_n(x)| \leq g(x) \; \forall \, x \in X$.
Então $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ e $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$.
Dem: pelo Lema de Fatou. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ temos que
$lim f_n(x) \leq g(x)$.
Portanto, $|f_n - f| \leq 2g$.
Aplicamos o Lema de Fatou à sequência $2g - |f_n - f|$:
$\int liminf \, (2g - |f_n - f|) d\mu \leq liminf \int (2g - |f_n - f|) \, d\mu$
Note que $liminf \, (-a_n) = - limsup \, (a_n)$
$\int 2g - limsup |f_n - f| \, d\mu \leq liminf \int 2g \, d\mu + liminf \int -|f_n - f| \, d\mu$
ou equivalentemente porque $\int 2g \, d\mu < +\infty$ e podemos cancelar nos dois membros
$- \int limsup \, |f_n - f| \, d\mu \leq liminf \int -|f_n - f| \, d\mu$
Como $f_n(x) \to f(x) \; \forall \, x$ segue
$0 \leq - limsup \int |f_n - f| \, d\mu$
$0 \geq limsup \int |f_n - f| \, d\mu$
Logo $lim \int |f_n - f| \, d\mu = 0$. Também $\int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \to 0 \Box$
Exercício: Calcular $lim_{n \to +\infty} \int_1^n (1 + \frac{x}{n})^n \, e^{-2x} \, dx$
Pelo Teorema da Convergência Dominada. Definamos a sequência
$f_n = \left\{ (1 + \frac{x}{n})^n \, e^{-2x} \; se \; 1 < x < n; 0 \; para \; x > n \right.$
$Como \; (1 + \frac{x}{n})^n \to e^x \; segue \; que \; f_n(x) \to e^{-x} = f$. Falta colocar uma função integrável que domine a sequência.
Como sabem, $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ logo $f_n \leq e^{-x}$. Tomamos $g = e^{-x}$ que é integrável. Assim podemos aplicar o Teorema e temos que
$\int f_n \, d\mu \to \int_1^{+\infty} f \, d\mu = e^{-1}$. Para calcular $\int f \, d\mu$, o fazemos como uma integral imprópria de Riemann.

Corolário. *: Se* $f_n : (X, \boldsymbol{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tais que* $\exists \int_X f_n d\mu$. *Então se* $\sum_1^\infty \int_X |f_n(x)| d\mu < +\infty$ *temos que* $\sum_1^\infty \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_1^\infty f_n d\mu$.

Observe que neste Corolário o resultado é o mesmo que no Corolário do Teorema da Convergencia Monótona, mas f_n não precisa ser ≥ 0 nem monótona.
Exercício: se $f_n \to f \in M^+$ e $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ então
$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \; \forall \, E \in \mathcal{A}$. (ficou para ser resolvido pelos estudantes)