Exercícios de Cálculo.

Última semana de setembro

1. Determine a **equação da reta** que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que seja paralela á direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$.

2. Determine a **equação vetorial da reta** que passa pelo ponto $(1, -1)$ e que é perpendicular á reta $2x + y = 1$.

3. Determine um vetor cuja direção seja paralela á reta $3x + 2y = 2$.

4. Determine a equação vetorial de uma reta que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e que seja paralela á reta $3x + 2y = 2$.

5. Determine um vetor cuja direção seja paralela á reta dada

   a) x-2y=3

   b) x+y=1

6. Determine um vetor cuja direção seja perpendicular á reta dada

   (a) $2x + y = 1$

   (b) $3x - y = 3$

7. Determine a equação vetorial de uma reta que passa pelo ponto $(2, 5)$ e que seja paralela á reta $x - y = 1$.

8. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que é perpendicular á reta $2x + y = 3$.

9. Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ e que seja perpendicular á direção do vetor $\vec{n} = (2, 1, 3)$.

10. Determine a equação vetorial da reta qu passa pelo ponto $(0, 1, -1)$ dado e que seja perpendicular ao plano $x + 2y - z = 3$.

11. $\star$ Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Definimos o *produto vetorial de* $\vec{u}$ por $\vec{v}$, que se indica $\vec{u} \wedge \vec{v}$, por

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

   em que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Verifique que

   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

   (b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

   (c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, em que $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

   (d) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

12. Calcule a norma do vetor dado

a) $\vec{u} = (1, 2)$

b) $\vec{v} = (2, 1, 3)$

13. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vetor qualquer em $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\|\vec{u}\| \geq |u_i|$, $i = 1, 2, 3$.

14. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Mostre que $\|\vec{u}\| \geq |u_i|$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

15. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Verifique que

    a) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$.

    b) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{u}\|$.

    c) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$.

16. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq |u_i - v_i|\,, i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

17. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. Prove
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\,.$$