MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Lista de Exercícios 2: Números Reais, Supremo e Ínfimo Respostas de alguns exercícios

1. Prove que em um corpo ordenado K valem as seguintes propriedades:
   (a) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.
   (b) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.
   (c) Se $0 < a < b$ então $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$. (A média geométrica é menor do que a média aritmética.)

2. Resolva $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$, identificando os axiomas e propriedades utilizados em cada passagem.

3. Prove que cada número a seguir é irracional:
   a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

   Soluções:

   a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
   $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{x^2-5}{2}$
   Se $x \in \mathbb{Q}$ então $\frac{x^2-5}{2} \in \mathbb{Q}$. Contudo $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Portanto $x \notin \mathbb{Q}$.
   - $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. De fato, se $\sqrt{6} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, com n e m primos entre si, então $6 \cdot m^2 = n^2$. Daí, temos que n^2 é par e n^2 é múltiplo de 3, o que implica que n é par e múltiplo de 3. Logo $2 \cdot 3 \cdot m^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot k^2$, donde segue que $m^2 = 6k^2$. Analogamente, temos que m^2 é múltiplo de 2 e de 3, logo m é múltiplo de 2 e de 3. Contradição.

   b) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
   $x = \sqrt{3} + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{x^2-8}{2}$
   Se $x \in \mathbb{Q}$ então $\frac{x^2-2}{2} \in \mathbb{Q}$.
   - $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$. De fato, se $\sqrt{15} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então $15.q^2 = 3 \cdot 5 \cdot q^2 = p^2$. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética, q e p se escrevem de forma única como produto de números primos. Na decomposição em fatores primos, p^2 e q^2 só terão fatores primos com potência par. Mas $3 \cdot 5 \cdot q^2$ terá na sua decomposição o primo 3 com potência impar (e também 5 com potência impar). Contradição. Portanto $x \notin \mathbb{Q}$

   c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$
   $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \Rightarrow x - \sqrt{5} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \Rightarrow x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x^2 = 2(\sqrt{6} + x\sqrt{5}) \Rightarrow x^4 = 4(6 + 2x\sqrt{30} + 5x^2 \Rightarrow \sqrt{30} = \frac{x^4-24-20x^2}{2x}$ (note que $x \neq 0$).
   Supondo que $x \in \mathbb{Q}$ então $\frac{x^4-24-20x^2}{2x} \in \mathbb{Q}$. Mas $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$, absurdo.
   - $\sqrt{30} \notin \mathbb{Q}$. De fato, se $\sqrt{30} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com p e q primos entre si. Então $30 \cdot q^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q^2 = p^2$. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética, q e p se escrevem de forma única como produto de números primos. Na decomposição em fatores primos, p^2 e q^2 só terão fatores primos com potência par. Mas $2 \cdot 3 \cdot 5q^2$ terá na sua decomposição os números primos 2, 3 e 5 com potência impar. Contradição. Portanto $x \notin \mathbb{Q}$.

4. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, exiba um contra-exemplo.

   (a) A soma de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.
   (b) O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.
   (c) A soma de dois números irracionais é irracional.
   (d) O produto de dois números irracionais é irracional.

5. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente. Prove que $\sup A$ é único.

6. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e limitado inferiormente. Prove que $\inf B$ é único.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado e suponha que m é o máximo de A, isto é, $m \in A$ e $a \leq m, \forall a \in A$. Prove que A tem supremo e que $\sup A = m$. Enuncie e demonstre o resultado análogo para ínfimo.

8. Dizemos que um subconjunto D de um corpo ordenado é *limitado* se for limitado superiormente e inferiormente, isto é, se existirem d_1 e d_2 tais que $d_1 \leq x \leq d_2$ para todo $x \in D$. Prove que D é limitado se e somente se existe d tal que $|x| \leq d$ para todo $x \in D$.

9. Verifique se cada subconjunto de $\mathbb{R}$ dado é limitado superiormente ou inferiormente e encontre, quando existir, o supremo, o ínfimo. Quais conjuntos têm máximo ou mínimo? Justifique todas as respostas.

   a) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *b)* $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *c)* $\left\{\dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   d) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ : a \leq x < b\}$ *e)* $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : x > a\}$ *f)* $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   g) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1, \dfrac{x}{x^2-1} \leq 2\right\}$ *h)* $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \dfrac{1}{x} \leq x\right\}$

   i) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, \dfrac{1}{x-1} \leq 4x+1\right\}$ *j)* $\{x^2 + x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$ *l)* $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   <u>Soluções:</u>

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1$. Então o conjunto dado (A) é limitado inferiormente e superiormente. Logo A tem ínfimo e supremo. Se $n = 2k$ é par ou $n = 2j - 1$ é impar, com $k, j \in \mathbb{N}$, então
   $$-1 \leq \frac{-1}{2j-1} < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}.$$
   Como $1/2 \in A$ ($n = 2$), podemos concluir que $1/2$ é máximo. Portanto, é supremo de A (ver exercício 7). Como $-1 \in A$ ($n = 1$), -1 é mínimo, portanto, é ínfimo de A (ver exercício 7).

   b) Temos que $\frac{n+(-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Como $-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $0 \leq \frac{n+(-1)^n}{n} \leq 2$. Ou seja, B é limitado superiormente e inferiormente. Logo o conjunto tem supremo e ínfimo. Se $n = 2k - 1$ ou $n = 2j$, com $k, j \in \mathbb{N}$, temos que
   $$0 \leq 1 - \frac{1}{2k-1} < 1 < 1 + \frac{1}{2j} \leq \frac{3}{2}.$$

Logo, se $x \in B$ temos que $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Como $0 \in B$ e $\frac{3}{2} \in B$, então 0 é mínimo e ínfimo de B e $\frac{3}{2}$ é máximo e supremo de B (exercício 7).

d) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $I = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervalo de $\mathbb{R}$. Vamos provar que $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Pela própria definição do I, a é limitante inferior de I e b é limitante superior de I. Se $b' < b$, então $b' < \frac{b'+b}{2} < b$, logo $\frac{b'+b}{2} \in I$. Portanto b' não é limitante superior de I. Ou seja, o menor limitante superior de I é b.

Como $a \in I$ então $a = \inf I = \min I$.

g) Temos que $\frac{x}{x^2-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2x^2+2}{x^2-1} \leq 0$. Estudando os sinal das funções do numerador e do denominador:

$$p(x) = -2x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$$

$$q(x) = x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Portanto,

		-1		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$		1		$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	
$p(x)$	$----$		$----$		$++++++++$		$++++$		$-------$
$q(x)$	$++++$		$----$		$--------$		$++++$		$++++++++$
$\frac{p(x)}{q(x)}$	$----$		$++++$		$--------$		$++++$		$--------$

Conclusão

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1, \frac{x}{x^2-1} \leq 2 \right\} =]\infty, -1[\cup [\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 1[\cup [\frac{1+\sqrt{17}}{4}, \infty[.$$

Portanto, E não é limitado superiormente nem inferiormente, logo não tem ínfimo nem supremo.

i) Analisando a inequação:

$$\frac{1}{x-1} \leq 4x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - (4x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x^2+3x+1}{4x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+3x+2}{4x+1} \leq 0.$$

Sendo $p(x) = -4x^2 + 3x + 1$ e $q(x) = x - 1$ então:

$p(x)$	$-----$	$\frac{3-\sqrt{41}}{8}$	$+++++$		$+++++$	$\frac{3+\sqrt{41}}{8}$	$-----$
$q(x)$	$-----$		$-----$	1	$+++++$		$+++++$
$\frac{p(x)}{q(x)}$	$+++++$	$\frac{3-\sqrt{41}}{8}$	$-----$	1	$+++++$	$\frac{3+\sqrt{41}}{8}$	$-----$

Portanto,

$$F = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, \frac{1}{x-1} \leq 4x+1\right\} = [\frac{3-\sqrt{41}}{8}, 1[\cup[\frac{3+\sqrt{41}}{8}, \infty[.$$

Conclusão, F tem mínimo, e portanto, ínfimo, que é $\frac{3-\sqrt{41}}{8}$ e não tem supremo pois não é limitado superiormente.

j) Seja $f(x) = x^2+x-1$, cujo domínio é $\mathbb{R}$. Queremos estudar o conjunto imagem de f. Derivando $f'(x) = 2x+1$ e então se $x \geq \frac{-1}{2}$ a função f é crescente e se $x \leq \frac{-1}{2}$ a função é decrescente. Portanto, $x = \frac{-1}{2}$ é ponto de mínimo de f. Podemos concluir que $f(x) \geq f(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Como f é contínua, temos $C = [-\frac{5}{4}, \infty[$. Então $\inf C = \min C = -\frac{5}{4}$ e C não tem supremo, pois não é limitado superiormente. (Se existisse m tal que $m \geq x^2+x-1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, fazendo $x = n \in \mathbb{N}$, teríamos $m \geq n^2+n-1 \geq n$, para todo n. Mas é absurdo, pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.)

10. Considere o subconjunto $D = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\mathbb{R}$. Prove que -1 e 1 são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de D e que eles não pertencem a D.

Solução: Se $n, m \in \mathbb{N}$ então

$$-1 < \frac{1}{m} - 1 \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Logo D é limitado inferiormente e superiormente por, respectivamente, -1 e 1.

Vamos provar que 1 é supremo de D. Seja $b = 1 - \varepsilon < 1$, como $\varepsilon > 0$. Pela Propriedade Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Logo, $1 - \frac{1}{n_0} > b$. Assim, b não é limitante superior. Portanto, 1 é o menor limitante superior de D.

Vamos provar que -1 é ínfimo de D. Seja $c = -1 + \varepsilon < 1$, com $\varepsilon > 0$. Pela Propriedade Arquimediana, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$. Logo, $\frac{1}{m_0} - 1 < c$. Assim, c não é limitante inferior. Portanto, -1 é o maior limitante inferior de D.

11. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Prove que se $A \subseteq B$, então

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Solução: Para qualquer conjunto vale que $\inf A \leq \sup A$, pois $\inf A \leq x \leq \sup A$, para todo $x \in A$.

Como $A \subseteq B$, se $x \in A$ então $x \in B$. Portanto,

$$x \leq \sup B,\ \forall x \in B \Rightarrow x \leq \sup B,\ \forall x \in A.$$

Logo, $\sup B$ é um limitante superior de A. Como $\sup A$ é o menor limitante superior, tem-se $\sup A \leq \sup B$.

Analogamente,

$$\inf B \leq x, \forall x \in B \Rightarrow \inf B \leq x, \forall \in A.$$

Logo, $\inf B$ é um limitante inferior de A. Portanto, $\inf B \leq \inf A$.

12. Sejam $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Prove que qualquer elemento de A é menor do que qualquer elemento de B.

(b) Calcule $\sup A$ e $\inf B$.

(c) Encontre $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < 10^{-3}$.

Solução:

(a) Todo elemento de A é da forma $\dfrac{n}{n+1}$ e, portanto, é menor do que 1. Todo elemento de B é da forma $\dfrac{n+1}{n}$ e, portanto, é maior do que 1. Logo, $a < 1 < b$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$.

(b) Vamos provar que $\sup A = 1$:
É claro que 1 é um majorante (limitante superior) de A. Precisamos provar que 1 é o menor majorante de A. Seja c um número real tal que $0 < c < 1$. Vamos provar que c não pode ser majorante de A. (Precisamos encontrar um número natural m tal que $a = \frac{m}{m+1} > c$.)
Como $1 - c > 0$, existe, pela Propriedade Arquimediana, um natural m tal que $m(1 - c) > c$. Então

$$m - cm > c \iff m > c(m+1) \iff \frac{m}{m+1} > c$$

Assim, encontramos $a = \frac{m}{m+1} \in A$ tal que $c < a$, o que mostra que c não é majorante de A.
A demonstração de que $\inf B = 1$ é análoga.

(c) (Faça uma figura que ajude a interpretar geometricamente esta situação.)
Vamos experimentar $a \in A$ e $b \in B$ com denominadores iguais a 1.000: $b = \dfrac{1.001}{1.000}$ e $a = \dfrac{999}{1.000}$. Temos:

$$|a - b| = b - a = \frac{2}{1.000} > 10^{-3}$$

Vamos então aumentar os denominadores, escolhendo agora $b = \dfrac{10.001}{10.000}$ e $a = \dfrac{9.999}{10.000}$. Temos:

$$|a - b| = b - a = \frac{2}{10.000} = \frac{1}{5.000} < \frac{1}{1.000}$$

13. Sejam A e B dois subcojuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$. Prove:

(a) $\sup A \leq \inf B$.

(b) $\sup A = \inf B$ se e somente se para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \varepsilon$.

Solução:

Se $a \leq b$ para todo $a \in A$ e todo $b \in B$, então cada $b \in B$ é limitante superior de A. Logo, $\sup A \leq b$, para todo $b \in B$. Então, $\sup A \leq \inf B$.

Dado $\varepsilon > 0$, suponha que existam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \varepsilon$. Então $\inf B - \sup A < b - a < \varepsilon$. Ou seja, $\inf B - \sup A \leq \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $\inf B = \sup A$.

Por outro lado, se $\inf B = \sup A$, dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $\inf B + \varepsilon/2 > b$ e existe $a \in A$ tal que $\sup A - \varepsilon/2 < a$. Então

$$b - a < \inf B + \varepsilon/2 - \sup A + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

14. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Defina o conjunto

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

Mostre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$, caso existam.

Solução: Primeiramente temos facilmente que, como $\inf A \leq a \leq \sup A$ e $\inf B \leq b \leq \sup B$, para todos $a \in A$ e $b \in B$, então $\inf A + \inf B \leq \inf(A + B)$ e $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Resta provar a igualdade. Dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $x' \in A$ e $y' \in B$ tais que $x' > \sup A - \varepsilon/2$ e $y' > \sup B - \varepsilon/2$.

Então, $x' + y' > (\sup A + \sup B) - \varepsilon$. Portanto, $\sup A + \sup B$ é o menor limitante superior de $A + B$, ou seja, $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.

Analogamente se prova para o ínfimo.

15. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado. Para $k \in \mathbb{R}$ fixado, defina $kA = \{kx : x \in A\}$.

    (a) Prove que se $k > 0$ então $\sup(kA) = k \cdot \sup A$ e $\inf(kA) = k \cdot \inf A$.

    (b) Prove que se $k < 0$ então $\sup(kA) = k \cdot \inf A$ e $\inf(kA) = k \cdot \sup A$.

    Note que, como consequência de (b), valem as igualdades

$$\sup(-A) = -\inf A \qquad \text{e} \qquad \inf(-A) = -\sup A$$

Solução:

(a) Como $\sup A \geq a \Leftrightarrow k. \sup A \geq k.a$, para todo $a \in A$, então $k \cdot \sup A \geq \sup(kA)$. Mas se $\sup A > \frac{\sup(kA)}{k}$ $(k > 0)$, pela definição de supremo, existe $b \in A$ tal que $b > \frac{\sup(kA)}{k}$, daí, $kb > \sup(kA)$ o que é absurdo. Portanto, $k \cdot \sup A = \sup(kA)$.

    O caso do ínfimo fica como exercício, pois é análogo.

(b) Adapte o item (a).

16. Uma propriedade importante de $\mathbb{R}$ é que entre quaisquer dois números reais distintos existem um número irracional e um número racional. Vamos prová-la. Para isso, começamos com a frase “Sejam a e b números reais distintos.”

    (a) Mostre que podemos supor que a e b são positivos e que $a < b$.

    (b) Para mostrar que existe um racional entre a e b, mostre primeiro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < b - a$. Em seguida, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < \frac{n}{m} < b$.

    (c) Para mostrar que existe um irracional entre a e b use a ideia de (a) e mostre que existem m e n tais que $\frac{n\sqrt{2}}{m}$ está entre a e b.