MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 4 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(-1,1)$. Defina a variável

$$Y_n = \min\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\}.$$

Mostre que Y_n converge em probabilidade para 0.

Solução

Observe que, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\min\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\} > \varepsilon) =$$

$$(P(|X_1| > \varepsilon) = (\frac{1-\varepsilon}{2})^n,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1-\varepsilon}{2})^n = 0.$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\log n} \quad e \quad P(X_n = n) = \frac{1}{\log n}.$$

Mostre que $X_n \to^P 0$ mas $E[X_n^2]$ não converge para 0.

Solução Observe que, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{\log n}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0,$$

isto é, $X_n \to^P 0$.

Contudo $E[X_n^2] = \frac{n^2}{\log n} = \infty$

Observe que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log n}$ é indeterminado, $\frac{\infty}{\infty}$, e pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\frac{1}{n}} = \infty.$$

3) Sejam $X_1, ..., X_n, ..$ variáveis aleatórias positivas, independentes e absolutamente contínuas, com funções de distribuições $F_1, ..., F_n, ...$ respectivamente. Defina a variável aleatória

$$Y_n = -\ln(1 - F_n(X_n))$$

e ache o limite de $F_{Y_n}(y)$.

Solução

Primeiramente calculemos a função de distribuição de Y_n:

$$P(Y_n \le y) = P(-\ln(1 - F_n(X_n)) \le y) =$$

$$P(\ln(1 - F_n(X_n)) \ge -y) = P(1 - F_n(X_n) \ge e^{-y}) =$$

$$P(F_n(X_n) \le 1 - e^{-y}) = 1 - e^{-y}.$$

Desde que

$$P(F_n(X_n) \leq x) = P(X_n \leq F_n^{-1}(x)) = F_n(F_n^{-1}(x)) = x.$$

Concluimos que, para qualquer valor n, Y_n tem distribuição exponencial padrão.

4) Observe que os resultados obtidos na LISTA 2 - EXTRA CLASSE implicam em convergência em probabilidade. Desenvolva-os como exercícios.

Soluções

4-1)
Para qualquer ε, positivo, temos

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Portanto $X_n \to^P 0$.

4-2)

$$\lim_{n\to\infty} P(|\max\{X_1, ..., X_n\} - \theta| > \varepsilon) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\theta - \max\{X_1, ..., X_n\} > \varepsilon) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\max\{X_1, ..., X_n\} \leq \theta - \varepsilon) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\theta - \varepsilon}{\theta})^n = 0.$$

Portanto $\max\{X_1, ..., X_n\} \to^P \theta$.

4-3)
Calculemos $E[Y_n]$:

$$E[Y_n] = E[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i] =$$

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iE[X_i] =$$

$$\frac{2}{n(n+1)}E[X_1]\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2}{n(n+1)}E[X_1]\frac{n(n+1)}{2} = E[X_1].$$

Observe também que

$$Var(Y_n) = Var(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i) =$$

$$\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 Var(X_i) =$$

$$Var(X_1)\frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$Var(X_1)\frac{4(2n+1)}{6n(n+1)}.$$

Como X_1 tem segundo momento finito, assim tem Y_n.
Portanto, pela desigualdade de Thebyshev, temos

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - E[X_1]| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{4(2n+1)}{n(n+1)} Var(X_1) = 0.$$

Concluimos que $Y_n \to^P E[X_1]$.

5) Observe que resultados obtidos na LISTA 3 - CLASSE implicam em convergência quase certa, que por sua vez, implicam convergência em probabilidade.