## Primeira Avaliação

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleaórias independentes e identicamente distribuídas com função de probabilidade

$$P(X_n = 1) = P(X_n = 3) = P(X_n = 5) = P(X_n = 7) = \frac{1}{n^5}$$

e $P(X_n = 4) = 1 - \frac{4}{n^5}$.

a) Qual o limite em probabilidade da sequência $(X_n)_{n\geq 1}$? Justifique.

b) Qual o limite quase certo (se existir) de $(X_n)_{n\geq 1}$? Justifique.

**Solução**

a)Observe que $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 4| \leq \varepsilon) = P(4 - \varepsilon \leq X_n \leq 4 + \varepsilon) =$$

$P(X_n = 4) = 1 - \frac{4}{n^5}$

portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 4| \leq \varepsilon) = 1.$$

b) Para todo $m \geq 2$ temos

$$P(|X_k - 4| > \frac{1}{m})) = 1 - P(|X_k - 4| \leq \frac{1}{m})) = \frac{4}{k^5}$$

e como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^5} < \infty$, pelo lema de Borel Cantelli concluimos que $X_n \to^{qc} 0$.

2) Seja $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes,absolutamente contínuas, com funções de distribuições

$$F_1(.), F_2(.), ..., F_n(.), ...$$

respectivamente. Defina a sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$ por $Yn = n^3.F_n(X_n)$. Prove que, com probabilidade 1, somente um nmero finito dos $Y_n$ tomam valores menores do que 1.

**Solução**

$P(\liminf\{Y_n > 1\}) = 1 - P(\limsup\{Y_n \leq 1\}) = 1$ pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{Y_n \leq 1\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty.$$

Pelo lema de Borel Cantelli, $P(\limsup\{Y_n \leq 1\}) = 0$