Lógica
Aula 9

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta e completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \iff \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

<u>Base:</u> Provas de 1 linha

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

<u>Base:</u> Provas de 1 linha

<u>Passo:</u> $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.
Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Base: Provas de 1 linha

Passo: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.
Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.
Qual a última regra aplicada?

Consequência da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Contra-exemplo indica que não há prova!

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é uma tautologia (ou válida) sse para qualquer v, $v(\varphi) = T$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é uma tautologia (ou válida) sse para qualquer v, $v(\varphi) = T$
- φ é falsificável sse existe v tal que $v(\varphi) = F$

Satisfatibilidade

- v satisfaz φ sse $v(\varphi) = T$
- φ é satisfatível sse existe v tal que $v(\varphi) = T$
- φ é uma tautologia (ou válida) sse para qualquer v, $v(\varphi) = T$
- φ é falsificável sse existe v tal que $v(\varphi) = F$
- φ é uma contradição (ou insatisfatível) sse para qualquer v, $v(\varphi) = F$

Algumas relações úteis

- Tautologia $\Longrightarrow$ SAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\Longrightarrow$ SAT
- Contradição $\Longrightarrow$ UNSAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\Longrightarrow$ SAT
- Contradição $\Longrightarrow$ UNSAT
- φ é tautologia $\iff \neg\varphi$ é UNSAT

Algumas relações úteis

- Tautologia $\Longrightarrow$ SAT
- Contradição $\Longrightarrow$ UNSAT
- φ é tautologia $\Longleftrightarrow$ $\neg\varphi$ é UNSAT
- φ é falsificável $\Longleftrightarrow$ $\neg\varphi$ é SAT

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$
2. $\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$
2. $\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$
3. $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...)) \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$

Prova da completude - Passo 1

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...))$$

Prova da completude - Passo 1

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$$

Analisar árvore!

Prova da completude - Passo 3

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...)) \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Prova da completude - Passo 3

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \psi)...)) \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Já vimos: abrir caixas e transformar suposições em premissas.

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$