Aula 6 – Integração por partes

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

- As técnicas de integração muitas vezes se baseiam em regras de derivação.
- Já vimos, na aula passada, a regra da substituição, que se baseia na regra da cadeia.
- Veremos, nesta aula, a técnica da integração por partes, que se baseia na regra da derivada do produto.
- Diferentemente do que acontece com a derivação, as técnicas de integração não nos fornecem um algoritmo para cálculo da primitiva.
- Precisamos encontrar a substituição certa em cada técnica, para simplificar a integral, e não complicar.
- Por "tentativa e erro" e/ou experiência descobrimos a técnica correta para ser usada em cada exercício, e como aplicá-la.

Teorema 1 (Técnica da Integração por Partes)

Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Temos

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Demonstração: Segue facilmente da regra da derivada do produto, pois $f(x)g(x)$ é primitiva de $f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

$\blacksquare$

Fórmula da integração por partes, usando a notação do diferencial

- Façamos $u = f(x)$ e $v = g(x)$.
- Temos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ **(notação informal)**.
- Substituindo na fórmula da integração por partes temos:
- $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$

Exemplo 1

Calcule $\int x \,\mathrm{sen}\, x dx$.

- Faça $u = x$ e $dv = \mathrm{sen}\, x dx$.
- Temos $du = dx$ e $v = -\cos x$.
- Logo, $\int x \,\mathrm{sen}\, x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx$.
- Portanto, $\int x \,\mathrm{sen}\, x dx = -x \cos x + \mathrm{sen}\, x + C$.

Observações:

- Suponha que no exemplo anterior fizéssemos as substituições $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = xdx$.
- Teríamos $du = \cos xdx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$.
- E, portanto, $\displaystyle\int x \operatorname{sen} xdx = \operatorname{sen} x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cos xdx$
- A igualdade acima é verdadeira, porém não nos ajuda a resolver, já que caímos numa integral mais complicada que a original.
- Precisamos procurar uma substituição que chegue a uma integral mais simples.

Exemplo 2

Calcule $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Observação 1

Em alguns casos precisamos usar integração por partes duas ou mais vezes, para simplificarmos a integral até conseguirmos resolver.

Exemplo 3

Calcule $\int x^2 e^x dx$.

Observação 2

Em alguns casos as substituições na integração por partes não reduzem a uma integral mais simples, mas a outra integral tão complicada quanto a original, e mesmo assim pode ser útil para encontrar a primitiva.

Exemplo 4

Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

Integração por partes em integral definida

Teorema 2

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas, deriváveis em* $]a, b[$ *e cujas derivadas são limitadas. Temos*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

lembrando que $f(x)g(x)\Big|_a^b$ *significa* $f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Exemplo 5

Calcule $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Fim