23-4 Cálculo de V para distribuições contínuas de carga

O potencial devido a uma distribuição contínua de carga pode ser calculado escolhendo um elemento de carga dq, que é tratado como uma carga puntiforme, e utilizando a propriedade de superposição $V = \Sigma\, kq_i/r_i$, substituindo o somatório por uma integral:

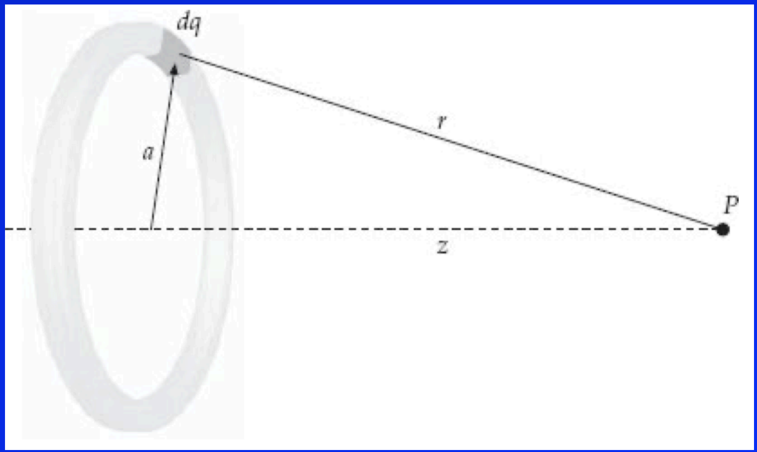
$$V = \int \frac{k\,dq}{r}$$

Esta equação considera que $V = 0$ a uma distância infinita das cargas e, portanto, não ela não pode ser utilizada para qualquer distribuição de cargas de dimensão infinita, como no caso de uma linha infinita de cargas ou um plano infinito de cargas.

Potencial *V* no eixo de um anel carregado

A figura mostra um anel uniformemente carregado de raio *a* e carga *Q* no plano *z* = 0 e centrado na origem.

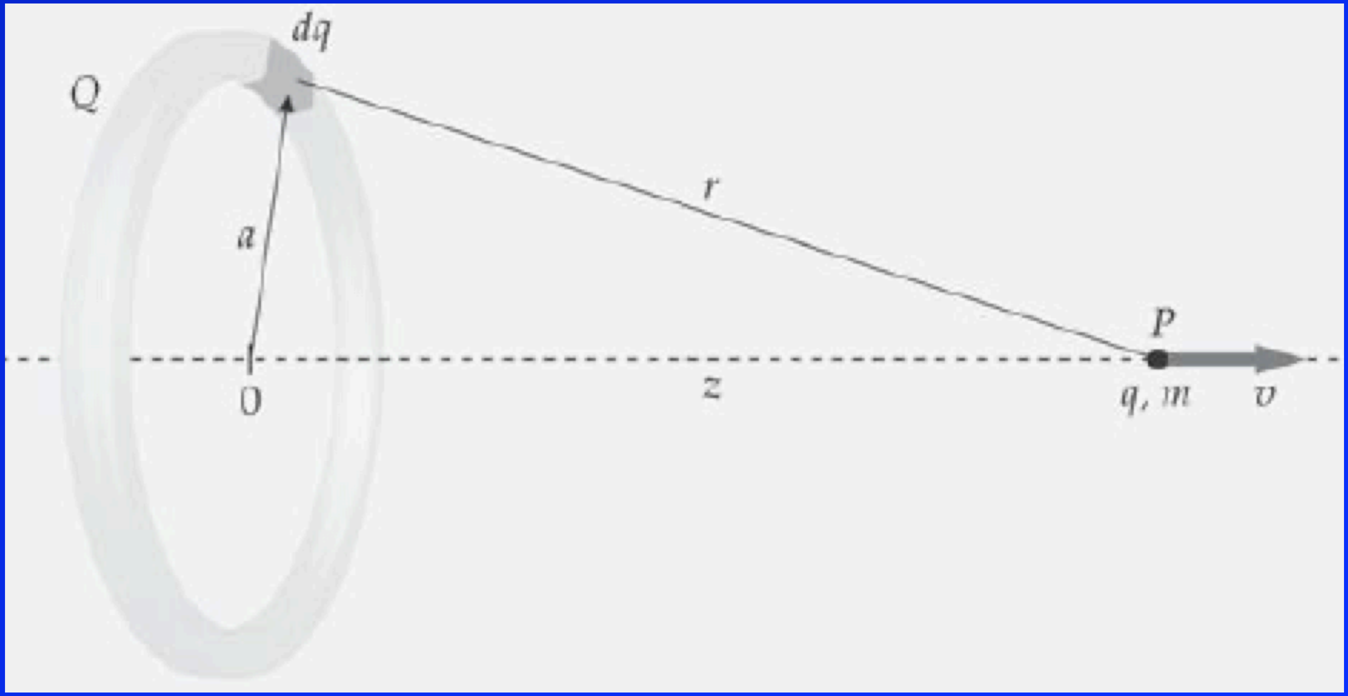
Usaremos a equação $V = \int \frac{k\,dq}{r}$ **, desde que nosso sistema é finito, isto é, não apresentando cargas no infinito. A distância de um elemento de carga *dq* ao ponto *P* no eixo do anel é** $r = \sqrt{z^2 + a^2}$**. Como esta distância é a mesma para todos os elementos de carga no anel, podemos remover este termo da integral. Assim, o potencial no ponto *P*, devido ao anel, é** $V = \int \frac{k\,dq}{r} = \frac{k}{r}\int dq = \frac{kQ}{r}$ **ou** $V = \frac{kQ}{\sqrt{z^2 + a^2}}$



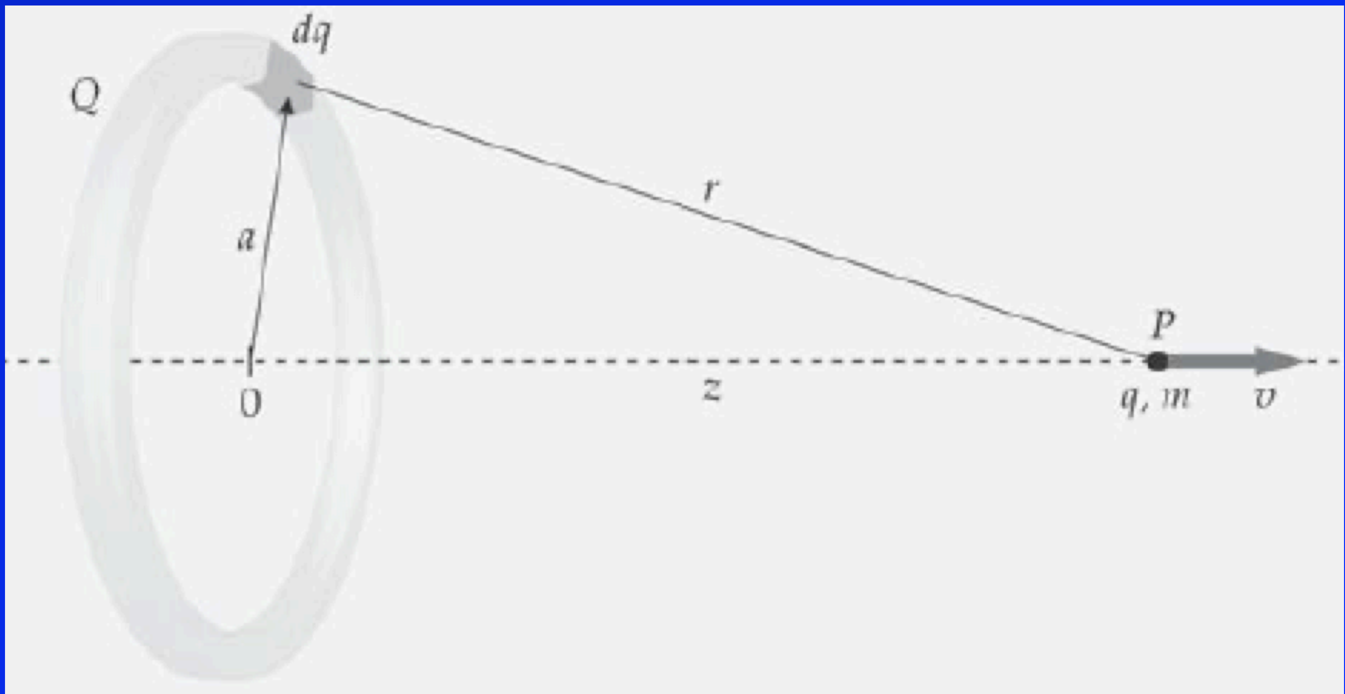
Note que, quando |*z*| é muito maior que *a*, o potencial será *kQ*/|*z*|, que é o potencial de uma carga puntiforme.

Exemplo 23-8 Um Anel e uma Partícula

Um anel de raio 4,0 cm está no plano $z = 0$ com seu centro na origem. O anel tem uma carga uniformemente distribuída de 8,0 nC. Uma pequena partícula com massa igual a 6,0 mg ($6{,}0 \times 10^{-6}$ kg) e carga igual a 5,0 nC é colocada no eixo z em $z = 3{,}0$ cm e liberada. Determine a velocidade da partícula quando ela está (a) a uma distância grande do anel e (b) na posição $z = 9{,}0$ cm



A carga do anel e da partícula são positivas, assim, a partícula é repelida pelo anel. À medida que a partícula se move ao longo do eixo *z*, sua energia potencial decresce e sua energia cinética aumenta. Usaremos a conservação da energia para determinar a energia cinética da partícula quando ela estiver bem afastada do anel. A velocidade final é determinada a partir da energia cinética final.



Vimos no exemplo anterior que o potencial no eixo de um anel carregado é dado por

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

(a) Quanto a partícula estiver muito longe do anel, isto é no infinito ($z \to \infty$), o potencial será zero e toda a energia potencial inicial terá sido convertida em energia cinética.

Assim, $\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{qkQ}{\sqrt{z_i^2 + a^2}}$ **e portanto** $v_f^2 = \frac{2kqQ}{m\sqrt{z_i^2 + a^2}}$ $\therefore v_f = 1,6\ \text{m/s}$

(b) No caso mais geral temos

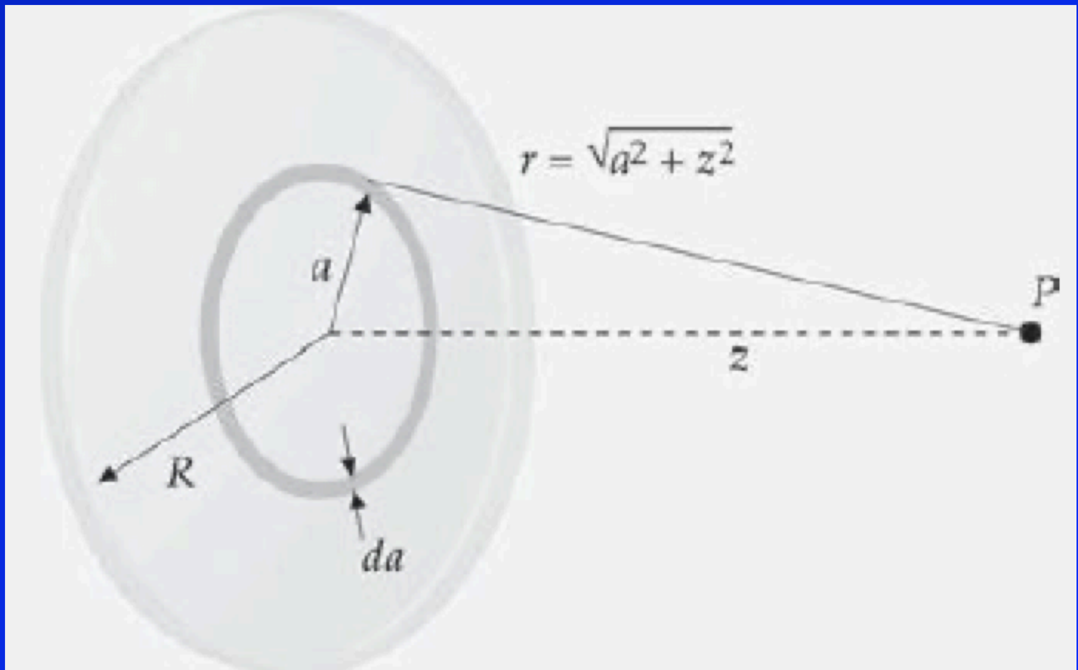
$$\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{qkQ}{\sqrt{z_i^2 + a^2}} = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{qkQ}{\sqrt{z_f^2 + a^2}}$$

onde $v_i = 0$, $z_i = 3,0\ \text{cm}$, $z_f = 9,0\ \text{cm}$ $\therefore v_f = 0,11\ \text{m/s}$

Exemplo 23-9 Potencial V no eixo de um disco carregado

Determine o potencial no eixo de um disco de raio R que contém uma carga total Q distribuída uniformemente em sua superfície.

Trataremos o disco como um conjunto de anéis carregados. O anel de raio a e espessura da na figura tem área de $dA = 2\pi a\, da$. A carga no anel é $dq = \sigma\, dA = \sigma\, 2\pi a\, da$, onde $\sigma = Q/(\pi R^2)$ é a densidade superficial de carga.



O potencial no ponto P devido à carga neste anel é

$$\frac{k\, dq}{\left(z^2+a^2\right)^{1/2}}.$$

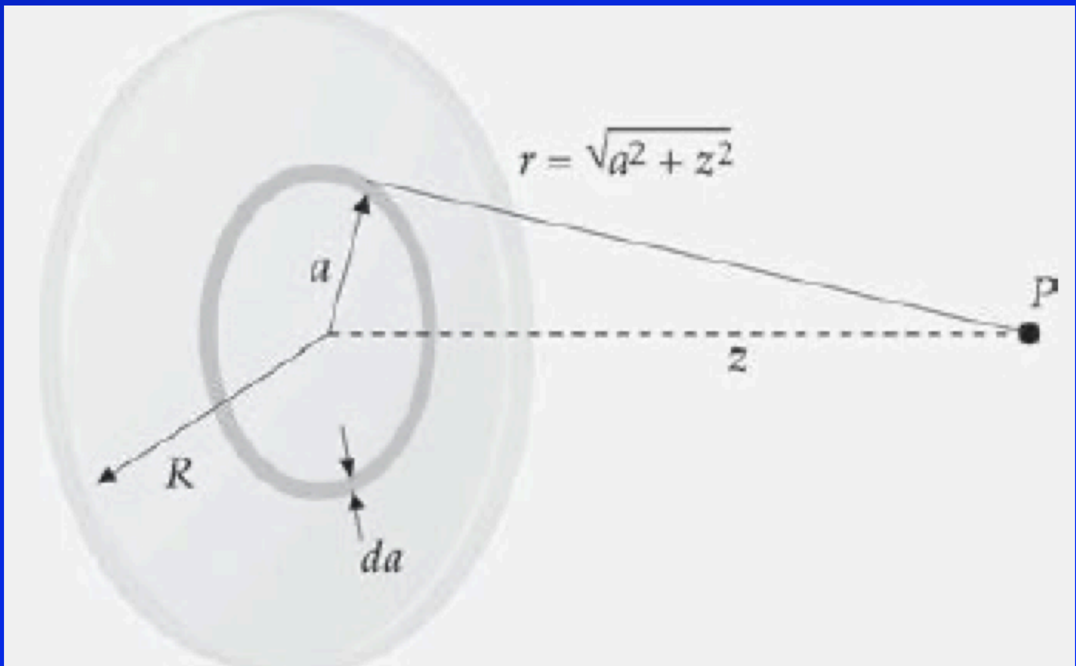
Então, integraremos de $a = 0$ até $a = R$ para determinar o potencial total devido à carga no disco.

Assim $$dV = \frac{k\,dq}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{k\sigma 2\pi a\,da}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

e $$V = \int_0^R \frac{k\sigma 2\pi a\,da}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = k\sigma\pi \int_0^R (z^2 + a^2)^{-1/2} 2a\,da$$

Tomando $u = z^2 + a^2$, **então** $du = 2a\,da$ **teremos**

$$V = k\sigma\pi \int_{z^2+0^2}^{z^2+R^2} u^{-1/2}\,du = k\sigma\pi \left.\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_{z^2}^{z^2+R^2}$$



$$= 2k\sigma\pi\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2}\right)$$

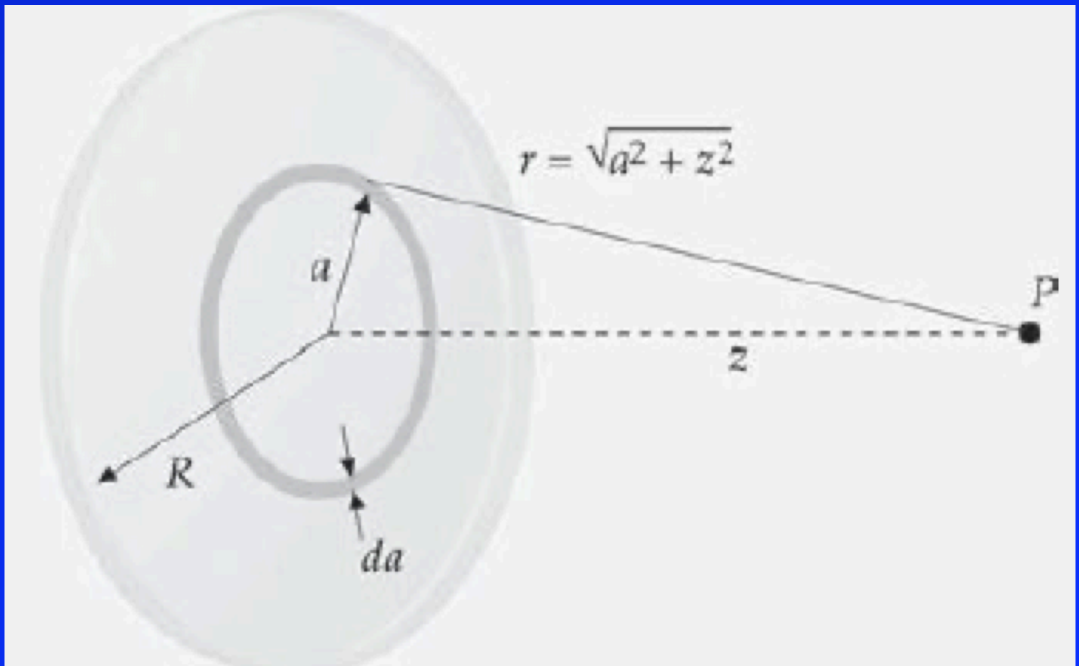
$$V = \boxed{2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right)}$$

Exemplo 23-10 Determine $\vec{E}$ a partir de V

Calcule o campo elétrico no eixo de um disco carregado uniformemente que tem carga *Q* e raio *R* usando o seu potencial

$$V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right)$$

Sabemos que, pela simetria do sistema,
o campo elétrico terá a direção do eixo *z*.
Assim, usaremos apena a componente *z* para o cálculo de E_z.



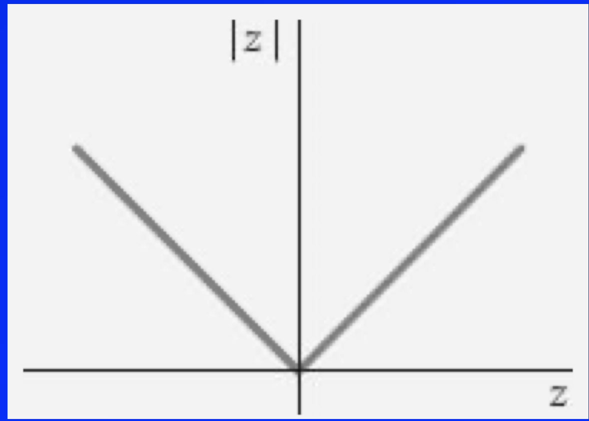
Como sabemos $E_z = -\,dV/dz$

$$V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right) = 2\pi k\sigma[(z^2+R^2)^{1/2}-|z|]$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -2\pi k\sigma\left[\frac{1}{2}(z^2+R^2)^{-1/2}2z-\frac{d|z|}{dz}\right]$$

Considerando que

$$\frac{d|z|}{dz} = \operatorname{sign}(z) = \begin{cases} +1 & z>0 \\ 0 & z=0 \\ -1 & z>0 \end{cases}$$



(É comum definir o valor de uma função em um ponto onde ela não é contínua como igual à média dos valores da função em cada lado da descontinuidade.)

Então

$$E_z = -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-\operatorname{sign}(z)\right) = \boxed{2\pi k\sigma\left(\operatorname{sign}(z)-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}$$

Potencial V devido a um plano infinito de cargas

Se considerarmos R muito grande, nosso disco uniformemente carregado se aproximará de um plano infinito, já fizemos isso para o cálculo do campo elétrico de um plano infinito. Mas o potencial de um disco uniformemente carregado

$$V = 2\pi k\sigma|z|\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}-1\right)$$

quando R tende ao infinito, V também tende ao infinito. A inconsistência está no fato do V acima ter sido obtido a partir de

$$V = \int \frac{k\,dq}{r}$$

que considera que $V = 0$ no infinito. Assim, a função potencial de um disco uniformemente carregado dada acima não é válida para o potencial de um disco carregado de raio infinito. Para distribuições de carga com dimensões infinitas, não podemos escolher V = 0 em um ponto a uma distância infinita das cargas.

Para obtermos o potencial V de um plano infinito uniformemente carregado com densidade superficial σ, primeiro determinamos o campo elétrico (através da lei de Gauss, por exemplo) e, então, calculamos o potencial V a partir de sua definição

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}.$$

Considerando o plano em $x = 0$, o campo elétrico na região $x > 0$ foi obtido no capítulo 22 e é

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i} = 2\pi k\sigma\,\hat{i} \qquad x > 0$$

Tomando a diferencial $d\vec{\ell}$ em coordenadas cartesianas temos

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

então

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -(2\pi k\sigma\,\hat{i})\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}) = -2\pi k\sigma\,dx \qquad x > 0$$

Assim $dV = -2\pi k\sigma\, dx$ para $x > 0$

Integrando ambos os lados desta equação

$\int_{V_0}^{V} dV = -2\pi k\sigma \int_0^x dx$ obtendo $V = V_0 - 2\pi k\sigma\, x$ para $x > 0$

onde a constante arbitrária de integração V_0 é o potencial em $x = 0$.

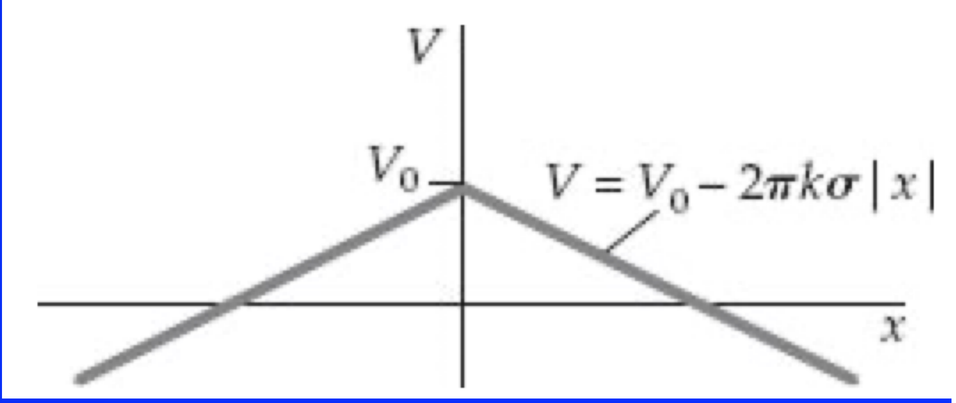
Para $x < 0$, o campo elétrico é $\vec{E} = -2\pi k\sigma\, \hat{i} \qquad x < 0$

então $dV = +2\pi k\sigma\, dx$ que integrando

$V = V_0 + 2\pi k\sigma\, x$ ou $V = V_0 - 2\pi k\sigma\, |x|$ para $x < 0$

ou $V = V_0 - 2\pi k\sigma\, |x|$ para qualquer x

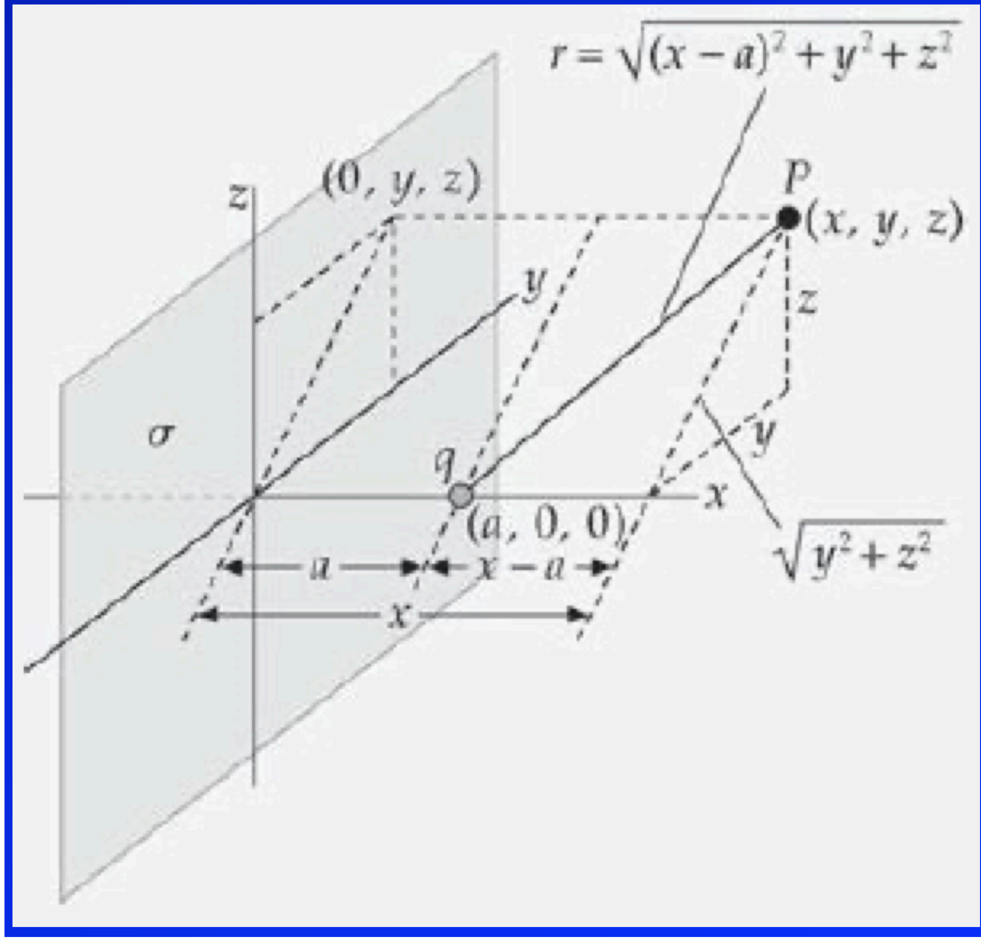
Um gráfico desse potencial será



Observe que o potencial é contínuo em $x = 0$, mas $E_x = -\,dV/dx$ não é contínuo neste ponto, como sabemos.

Exemplo 23-11 Uma placa carregada e uma carga puntiforme

Uma placa plana infinita com uma densidade superficial de carga uniforme *σ* está no plano *x* = 0, e uma carga puntiforme *q* está no eixo *x* em *x* = *a*. Determine o potencial em um ponto *P* a uma distância *r* da carga puntiforme.



Usaremos o princípio da superposição, assim o potencial total *V* será a soma dos potenciais individuais devidos ao plano e à carga puntiforme.

Mas, em ambos os casos, o ponto de referência não poderá ser em $x = \pm\infty$ e $x = a$.

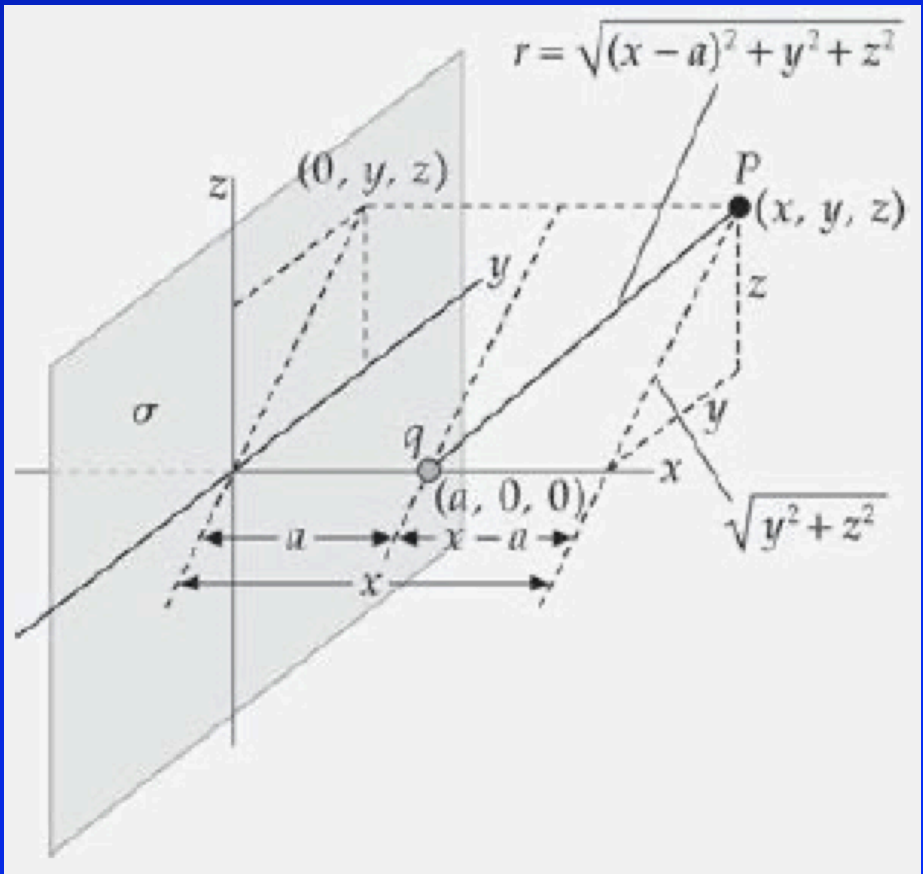
Para este cálculo, escolhemos V = 0 na origem.

O potencial gerado por um plano infinito carregado uniformemente com uma densidade superficial de carga σ é

$$V_{plano} = V_0 - 2\pi k\sigma\,|x|$$

e o potencial gerado por uma carga puntiforme é

$$V_{punt} = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{ref}}$$



Então

$$V = V_{plano} + V_{punt}$$

$$\therefore V = -\,2\pi k\sigma\,|x| + \frac{kq}{r} + C$$

onde a constante $C = V_0 - \dfrac{kq}{r_{ref}}$

que corresponde à escolha do referencial onde

$V_0 = 0$, na origem.

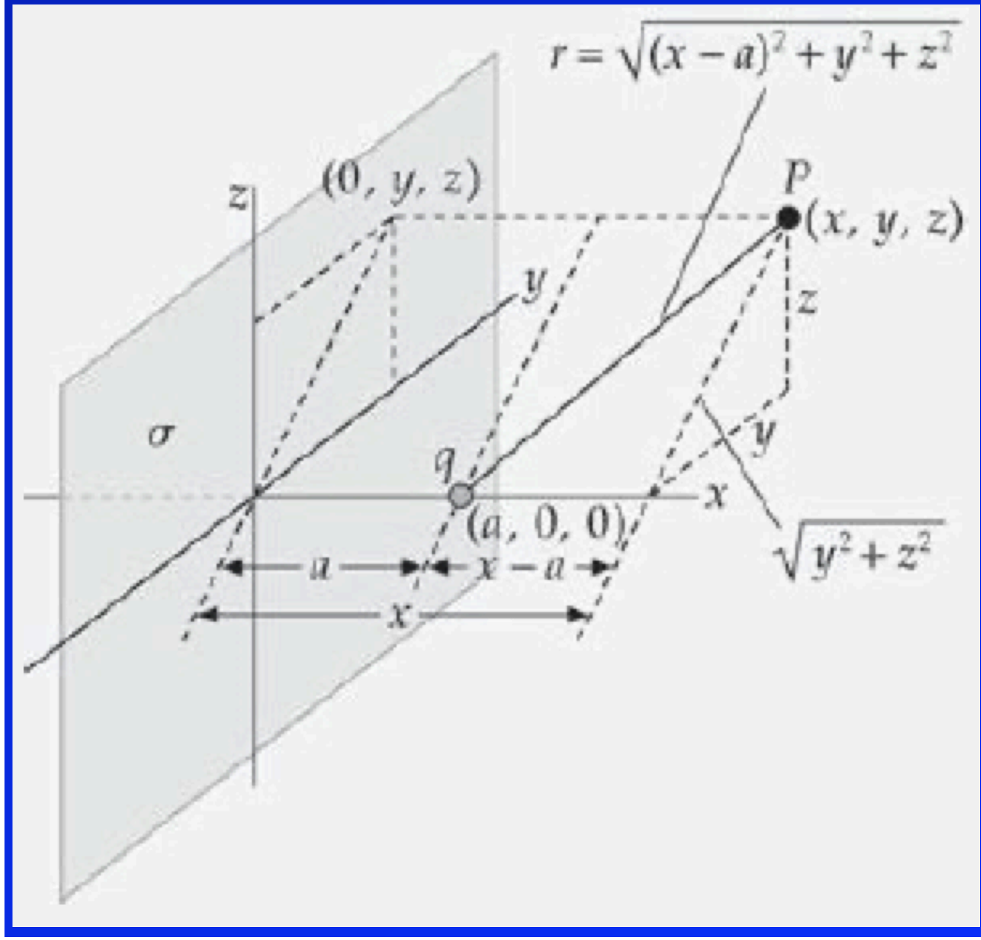
Reescrevendo a equação obtida

$$V = -2\pi k\sigma\,|x| + \frac{kq}{r} + C \qquad \text{onde } C = V_0 - \frac{kq}{r_{ref}}$$

Precisamos definir *r*, (distância entre a carga puntiforme e o ponto campo *P*) em termos de *x*, *y* e *z*.

Pelo desenho temos, $r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$ portanto

$$V = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + C$$



Como escolha tomaremos $V = 0$ na origem, assim

$$0 = 0 + \frac{kq}{a} + C \quad \text{então} \quad C = -\frac{kq}{a}$$

então

$$V = -2\pi k\sigma|x| + \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{kq}{a}$$

$$= \boxed{-2\pi k\sigma|x| + kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Potencial *V* dentro e fora de uma casca esférica de cargas

Determinemos o potencial devido a uma fina casca esférica de raio *R* e carga *Q* uniformemente distribuída na sua superfície. Estamos interessados no potencial em todos os pontos no interior, no exterior e na casca.

Esta distribuição de cargas está confinada em uma região finita do espaço e, assim, poderíamos calcular o potencial pela integração de

$$V = \int \frac{k\,dq}{r}$$

que considera $V = 0$ no infinito.
Mas, há uma maneira muito mais simples:
determinar o campo elétrico pela lei de Gauss
e calcular o potencial a partir de $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$.

Do lado de fora da casca esférica, o campo elétrico é radial e é o mesmo que se a carga Q fosse puntiforme e estivesse na origem:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

Lembrando que nesse caso a variação no potencial para um deslocamento $d\vec{\ell}$ fora da casca é apenas radial, então

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQ}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQ}{r^2}dr$$

pois o produto $\hat{r}\cdot d\vec{\ell}$ é igual a dr.

Integrando ao longo de um caminho (qualquer) desde o ponto de referência (no infinito) até o ponto P, obtemos

$$V_P = -\int_{\infty}^{\vec{r}_P}\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r_P}\frac{kQ}{r^2}dr = -kQ\int_{\infty}^{r_P}r^{-2}\,dr = kQ\frac{1}{r}\Big|_{-\infty}^{r_P} = \frac{kQ}{r_P}$$

onde P é um ponto arbitrário na região $r \geq R$, e r_P é a distância do centro da casca ao ponto P. Assim:

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad r \geq R$$

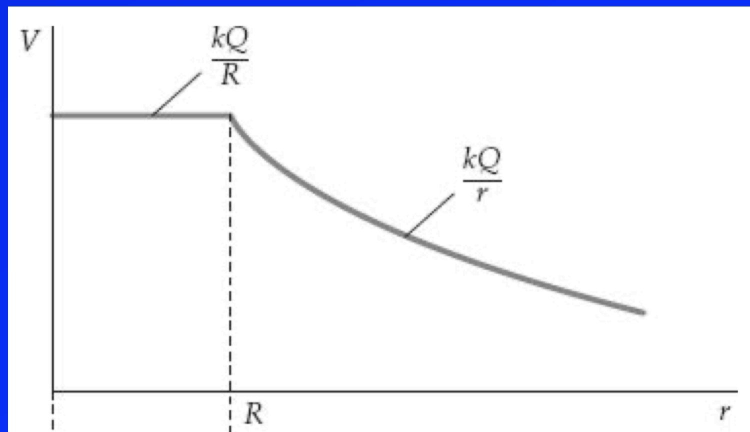
Dentro da casca esférica, pela lei de Gauss, sabemos que o campo elétrico $\vec{E}$ é igual a zero em todos os pontos.

Integrando novamente do ponto de referência (no infinito) até um ponto P arbitrário dentro da casca esférica, obtemos

$$V_P = -\int_{\infty}^{\vec{r}_P} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{r^2}\, dr - \int_{R}^{r_P} (0)\, dr = \frac{kQ}{R}$$

O potencial em todos os pontos dentro da casca esférica é kQ/R, onde R é o raio da casca.

Assim
$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & (r \geq R) \\[2ex] \dfrac{kQ}{R} & (r \leq R) \end{cases}$$



Uma região de campo elétrico nulo implica, simplesmente, que o campo potencial é uniforme ao longo desta região, desde que

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Exemplo 23-12 Determine o potencial para uma esfera carregada uniformemente

Considere uma esfera sólida uniformemente carregada com raio *R* e carga *Q*.
O campo elétrico no interior da esfera é dado por $E_r = k\frac{Q}{R^3}r$.
Determine o potencial *V* dentro e fora da esfera.

Fora da esfera, o sistema é semelhante a uma carga puntiforme e o potencial é dado por $V = kQ/r$, onde foi considerado a referência de $V_0 = 0$ no infinito.

Dentro da esfera, *V* pode ser determinado integrando $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$, onde o campo elétrico dentro da esfera é dado por $\vec{E} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r}$. Assim

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQr}{R^3}\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQr}{R^3}dr$$

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQr}{R^3}\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{kQr}{R^3}dr$$

Integrando ao longo de um caminho (qualquer) desde o ponto de referência (no infinito) até o ponto *P*, obtemos

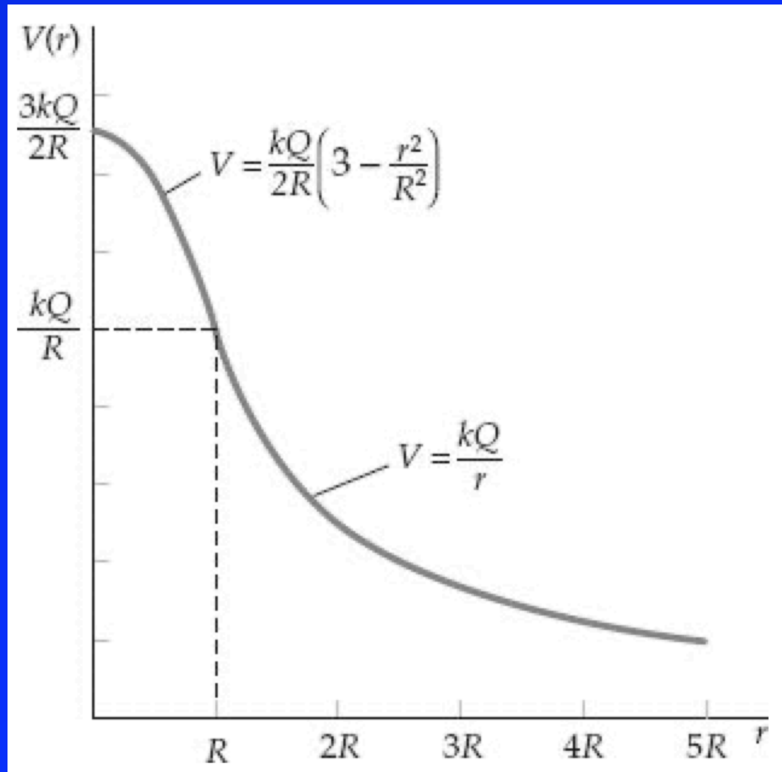
$$V_P = -\int_\infty^{r_P} E_r\,dr = -\int_\infty^{R}\frac{kQ}{r^2}dr - \int_R^{r_P}\frac{kQ}{R^3}r\,dr$$
$$= \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R^3}(r_P^2 - R^2) = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r_P^2}{R^2}\right)$$

assim $V(r) = \boxed{\frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad r \le R}$

Gráfico do potencial de uma esfera sólida uniformemente carregada com raio *R* e carga *Q*.

Note que o potencial cai quando *r* aumenta, pois o campo elétrico está no sentido radial positivo.

Note também que *V*(*r*) e $E_r = -\frac{dV}{dr}$ são contínuos em todas as regiões, pois $\rho \neq \infty$



Potencial V devido a uma linha infinita de cargas

Vamos calcular o potencial devido a uma linha infinita uniformemente carregada com densidade linear λ.
Assim como no caso do plano infinito, esta distribuição de cargas não está confinada a uma região finita do espaço e, portanto, não podemos calcular o potencial pela integração direta de $dV = k\,dq/r$, pois, para esta equação, $V_{ref} = 0$ é no infinito.

Podemos então determinar esse potencial, inicialmente obtendo o campo elétrico através da lei de Gauss e, depois, integrando o campo elétrico.

Vimos no capítulo 22 que o campo elétrico de uma linha infinita uniformemente carregada com densidade linear λ é $\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{R}$
onde R é a distância radial à linha e
$\hat{R}$ é o versor na direção radial à linha, apontado para fora.

Copiando o campo elétrico de uma linha infinita uniformemente carregada com densidade linear λ

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{R}$$

A variação no potencial para um deslocamento arbitrário $d\vec{\ell}$ é

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}\cdot d\vec{\ell}$$

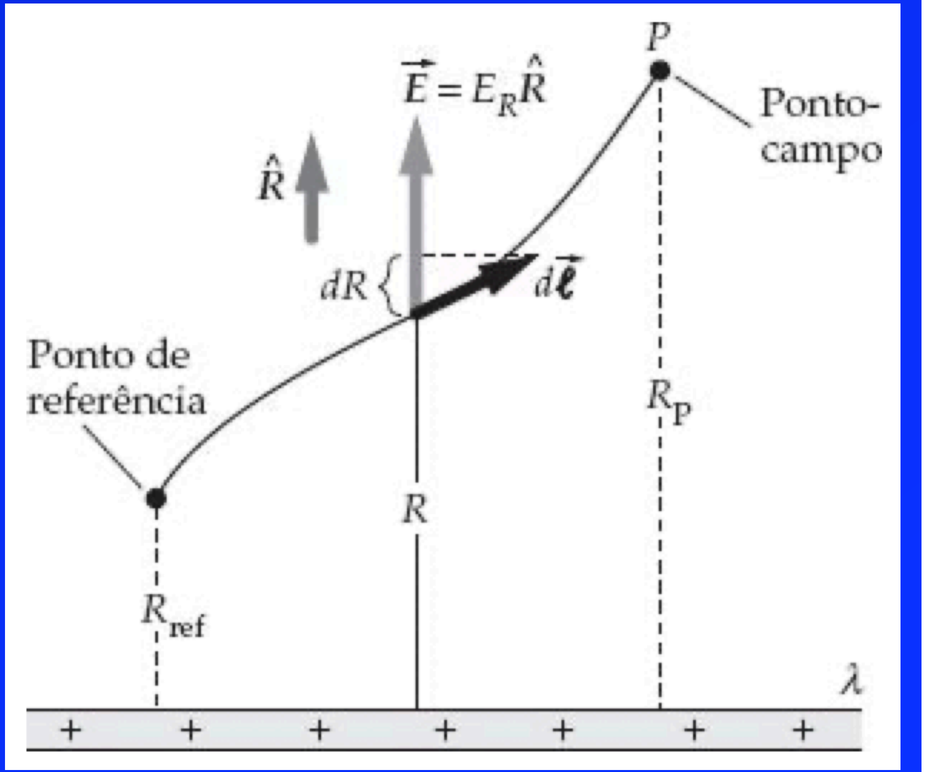
onde $\hat{R}\cdot d\vec{\ell} = dR$, assim,

$$dV = -\frac{2k\lambda}{R}dR$$

Integrando de um ponto arbitrário de referência até um ponto arbitrário de campo P, obtemos

$$V_P - V_{\text{ref}} = -2k\lambda\int_{R_{\text{ref}}}^{R_P}\frac{dR}{R} = -2k\lambda\ln\frac{R_P}{R_{\text{ref}}}$$

onde R_P e R_{ref} são as distâncias radiais do ponto P e do ponto de referência até a linha de carga.



Retomando o potencial obtido para uma linha infinita uniformemente carregada com densidade linear λ

$$V_P - V_{\text{ref}} = -2k\lambda \int_{R_{\text{ref}}}^{R_P} \frac{dR}{R} = -2k\lambda \ln \frac{R_P}{R_{\text{ref}}}$$

Por conveniência, escolhemos o potencial como zero no ponto de referência ($V_{ref} = 0$).

Não podemos escolher R_{ref} igual a zero porque $\ln(0) = -\infty$, e não podemos escolher R_{ref} igual a infinito porque $\ln(\infty) = +\infty$. Mas, qualquer outra escolha no intervalo $0 < R_{ref} < \infty$ é aceitável e a função potencial é dada por

$$V = 2k\lambda \ln \frac{R_{\text{ref}}}{R} = 2k\lambda\,(\ln R_{ref} - \ln R)$$

Por exemplo, tomando $V_{ref} = 0$ em $R_{ref} = 1$, teremos $V = -2k\lambda\ \ln R$.

23-5 Superfícies equipotenciais

O potencial *V* tem o mesmo valor em uma superfície equipotencial.

Se uma carga teste sofrer um pequeno deslocamento $d\vec{\ell}$ paralelo à uma superfície equipotencial, teremos

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Como $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ é zero para qualquer $d\vec{\ell}$ paralelo a uma superfície equipotencial, significa que $\vec{E}$ nunca tem componente paralela à uma superfície equipotencial, portanto $\vec{E}$ é sempre perpendicular a superfícies equipotenciais ou nulo.

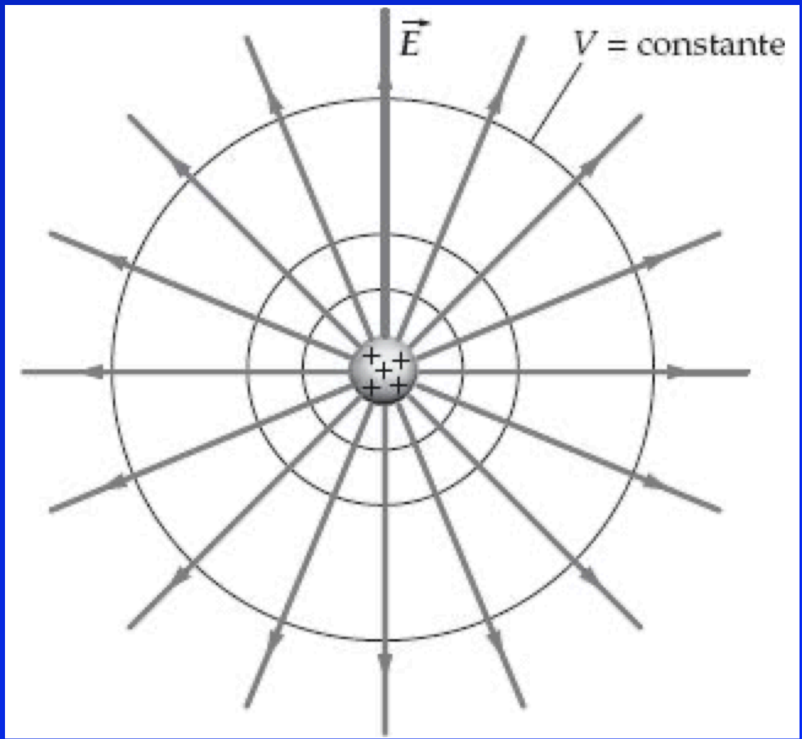
Assim, concluímos que as linhas de campo elétrico são normais à qualquer superfície equipotencial que elas interceptem.

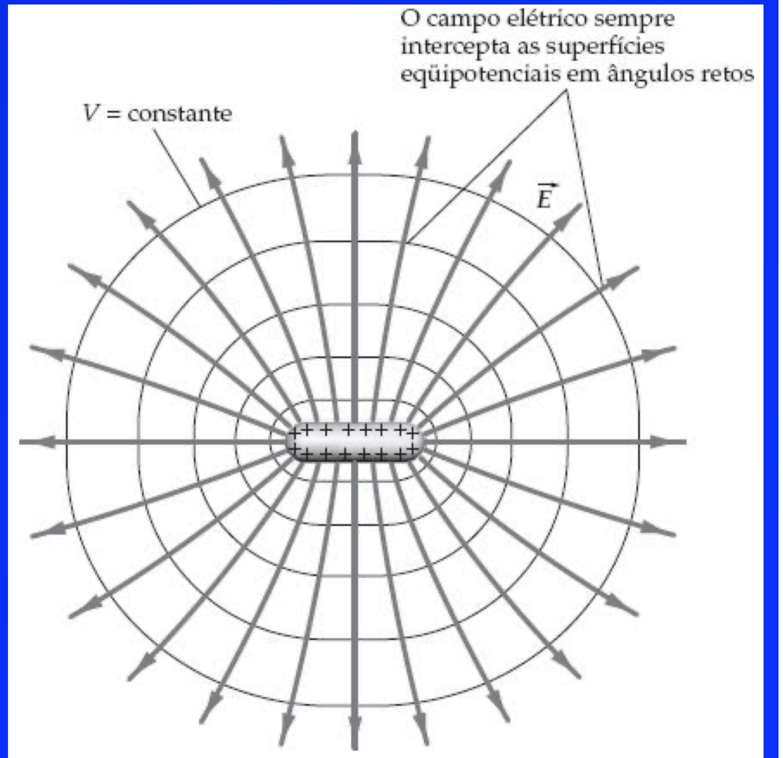
No caso de um condutor em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico no interior do material é nulo. O valor do potencial é o mesmo em todo o volume ocupado por um material condutor.

Isto é, o condutor é uma região equipotencial tridimensional e a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial.

As figuras mostram superfícies equipotenciais na vizinhança de um condutor esférico e de um condutor não-esférico.

Observe que em qualquer ponto que a linha de campo penetra numa superfície equipotencial, a linha é normal à superfície equipotencial.



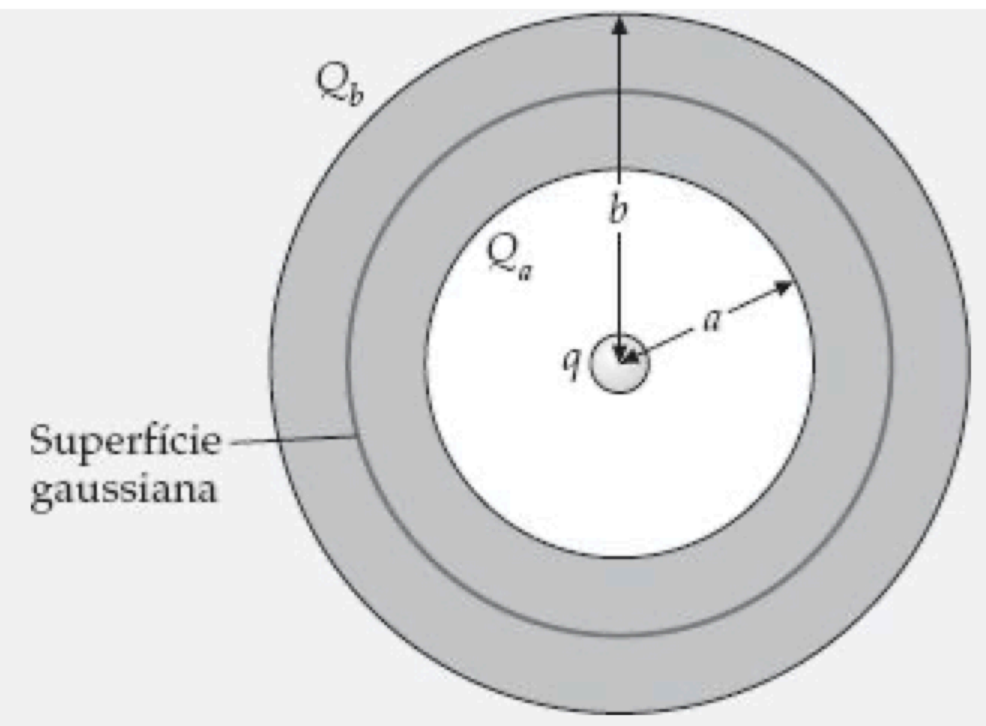


Se partimos de uma superfície equipotencial até a superfície vizinha através de um deslocamento $\vec{d\ell}$ ao longo de uma linha de campo na direção do campo, o potencial varia de $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$.

Assim, dadas 2 superfícies equipotenciais, na região onde elas estiverem mais próximas, a magnitude do campo elétrico *E* é maior.

Exemplo 23-13 Uma casca esférica oca condutora

Uma casca esférica condutora, não carregada e oca, tem raio interno *a* e raio externo *b*. Uma carga puntiforme positiva $+q$ está no centro da casca.
(a) Determine a carga em cada uma das superfícies do condutor.
(b) Determine o potencial $V(r)$ em todas as regiões, considerando $V = 0$ em $r = \infty$.



(a) Utilizando a lei de Gauss

$$\phi = 4\pi k Q_{dentro}$$

onde $\phi = \oint_S E_n dA$

Tomando uma superfície dentro do condutor (veja figura), onde $\vec{E} = 0$, teremos $\phi = 0$ e

$$\therefore q + Q_a = 0 \quad \therefore \; Q_a = -q$$

A casca condutora é neutra, assim $Q_a + Q_b = 0 \therefore Q_b = -Q_a = +q$

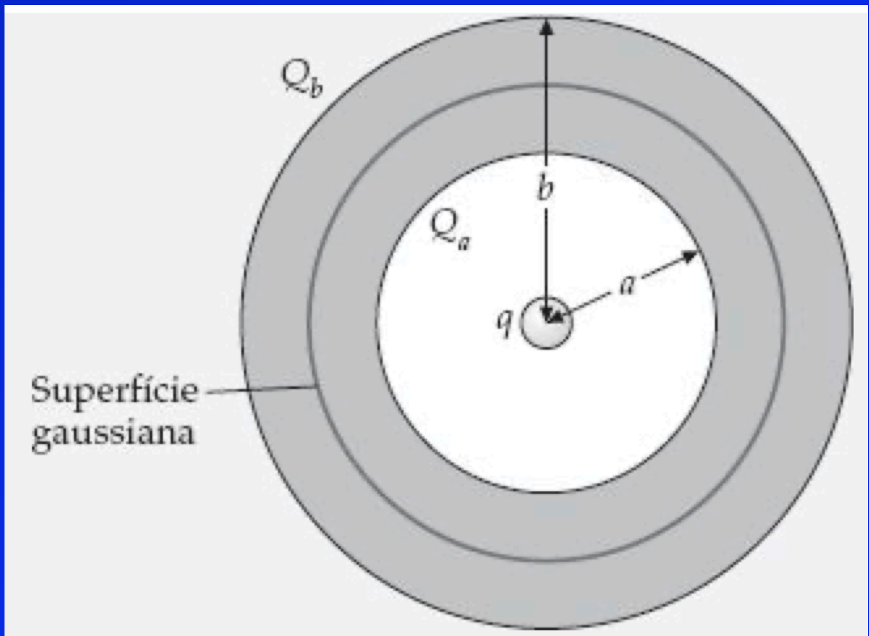
(b) O potencial em qualquer ponto é a soma dos potenciais devidos às cargas individuais, assim $V = V_q + V_{Q_a} + V_{Q_b}$

O potencial devido a uma fina casca esférica uniformemente carregada de raio *R* foi calculado nesta aula e é dado por

$$V = \begin{cases} \dfrac{kQ}{r} & (r \geq R) \\[2ex] \dfrac{kQ}{R} & (r \leq R) \end{cases}$$

Assim, teremos

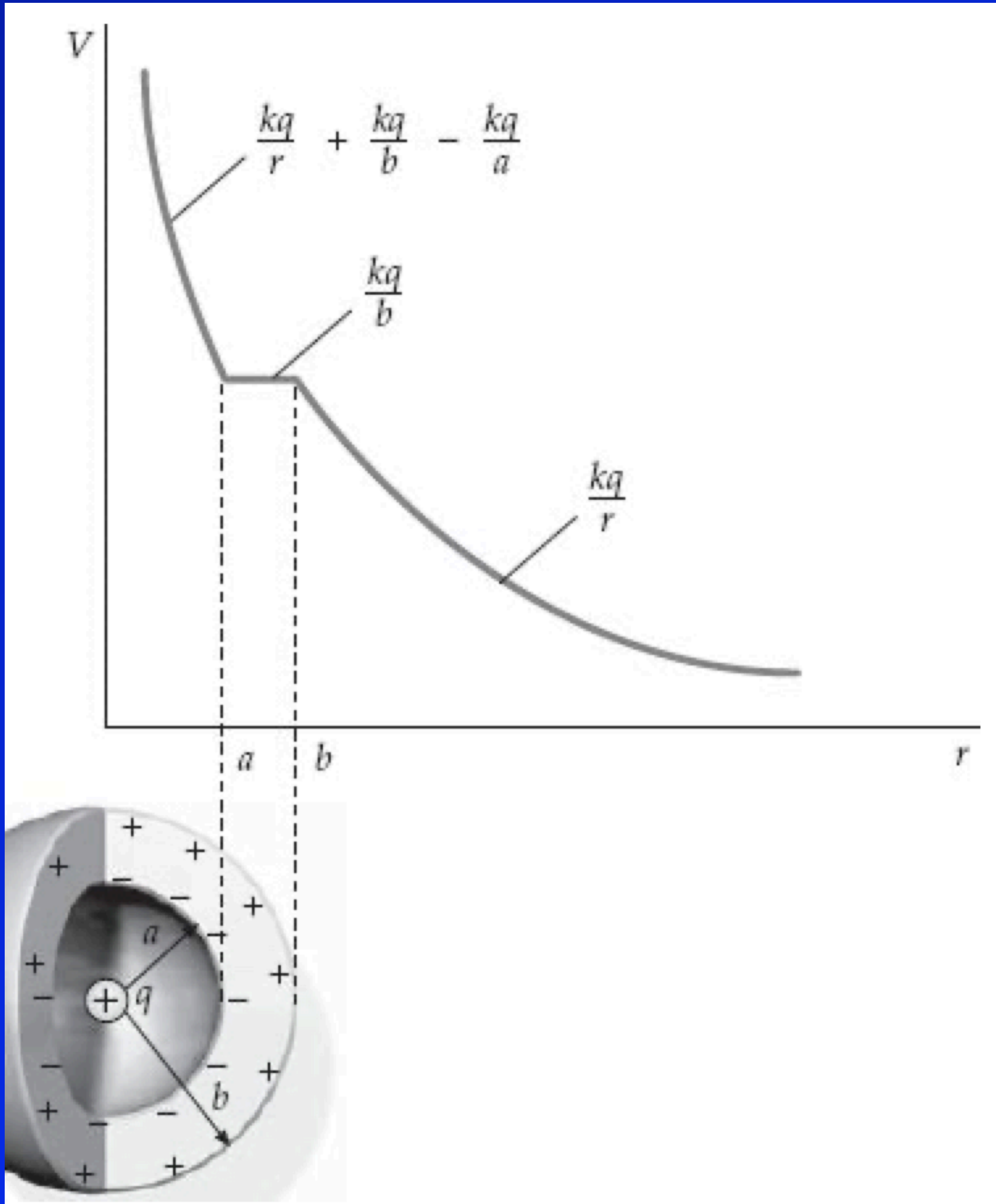
$$V = \frac{kq}{r} + \frac{kQ_a}{r} + \frac{kQ_b}{r} = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \boxed{\frac{kq}{r} \quad r \geq b}$$



$$V = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{b} = \boxed{\frac{kq}{b} \quad a \leq r \leq b}$$

$$V = \boxed{\frac{kq}{r} - \frac{kq}{a} + \frac{kq}{b} \quad 0 < r \leq a}$$

A figura mostra o potencial elétrico como uma função da distância ao centro da cavidade.



Dentro de um material condutor, onde $a \leq r \leq b$, o potencial tem um valor constante kq/b.

Fora da casca, o potencial é o mesmo que o de uma carga puntiforme q no centro da casca.

Observe que $V(r)$ é contínuo em todas as regiões.

O campo elétrico é descontínuo nas superfícies do condutor, o que se reflete na descontinuidade da declividade de $V(r)$ em $r = a$ e em $r = b$.