Aprendizagem Profunda com Matlab
Aprendizagem de Máquina, Redes Neurais e Inteligência Artificial

Professor Marco H. Terra

terra@sc.usp.br

Departmento de Engenharia Elétrica e de Computação
Universiade de São Paulo em São Carlos

Parte 2

October 6, 2020

MATLAB Deep Learning: With Machine Learning, Neural Networks and Artificial Intelligence
Phil Kim - Seoul, Soul-t'ukpyolsi, Korea (Republic of)
ISBN-13 (pbk): 978-1-4842-2844-9
ISBN-13 (electronic): 978-1-4842-2845-6
DOI 10.1007/978-1-4842-2845-6

Sumário

Rede Neural

- Largamente utilizada como modelo para aprendizagem de máquina
- Grande interesse atual em rede neural (RN): aprendizagem profunda
- Como RN está relacionada com aprendizagem de máquina
- Aprendizagem de RN com uma única camada

Rede Neural

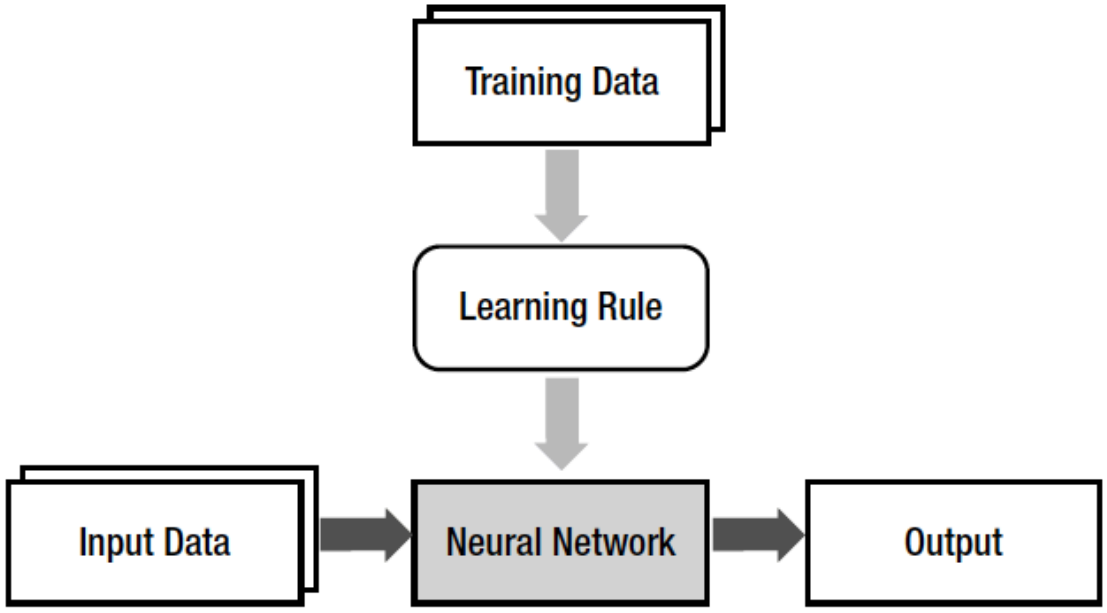


Figure 2: Relação entre aprendizagem de máquina e rede neural.

Nós de uma Rede Neural

- Neurônio não tem a capacidade de armazenar informação
- Apenas transmite sinais para outro neurônio
- O cérebro é uma rede gigante de neurônios
- A associação de neurônios forma uma informação específica
- A RN reproduz a associação dos neurônios, mecanismo mais importante do cérebro, usando os pesos

Nós de uma Rede Neural

Cérebro	Rede Neural
Neurônio	Nó
Conexão de neurônios	Peso da conexão

Table 1: Resumo da analogia entre cérebro e rede neural

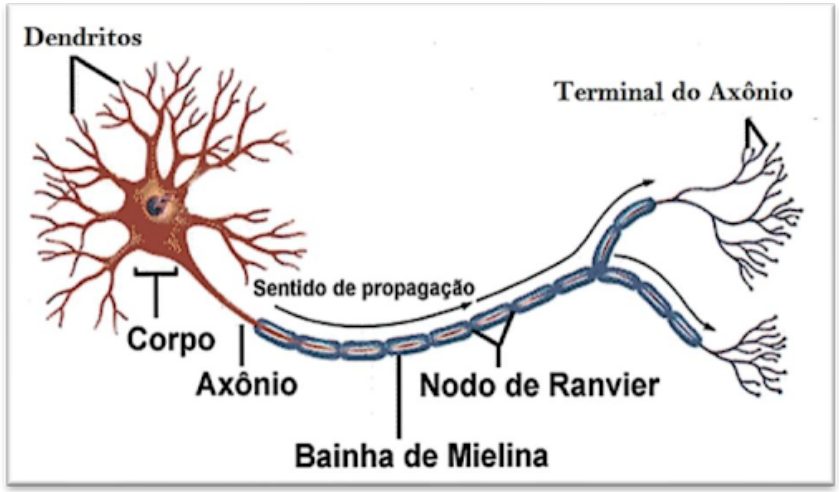


Figure 3: Neurônio (Fonte: MT Ciências, circuito itinerante.)

Nós de uma Rede Neural

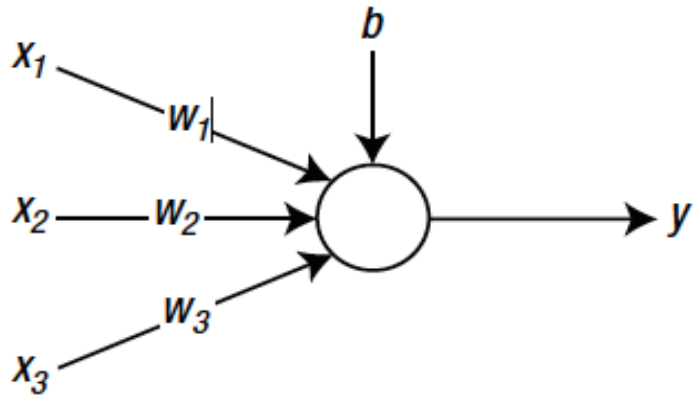


Figure 4: Um nó que recebe três entradas.

Nós de uma Rede Neural

- *Node of Ranvier, periodic gap in the insulating sheath (myelin) on the axon of certain neurons that serves to facilitate the rapid conduction of nerve impulses*
- Neurônio artificial (Figura 4): círculo e seta denotam o nó e o fluxo de sinal
- x_1, x_2 e x_3 são os sinais de entrada
- w_1, w_2 e w_3 são os pesos para os sinais correspondentes
- b é um fator de polarização

Nós de uma Rede Neural

- A soma poderada do neurônio da Figura 4 é calculada da seguinte maneira

$$v = (w_1 x_1) + (w_2 x_2) + (w_3 x_3) + b \tag{1}$$

$$v = wx + b \tag{2}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

- Este exemplo ilustra a função dos pesos na RN: imita como o cérebro altera a associação dos neurônios

Nós de uma Rede Neural

- Função de ativação: determina o comportamento dos nós

$$y = \phi(v) = \phi(wx + b) \tag{4}$$

Camadas da Rede Neural

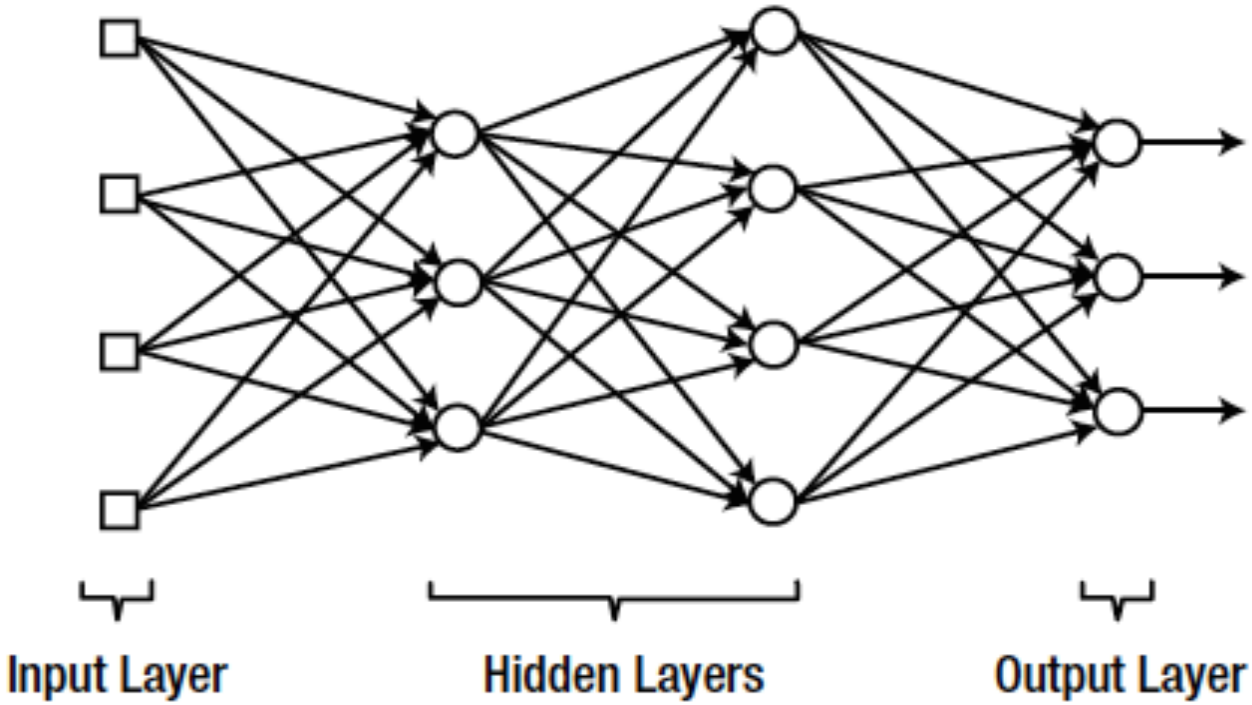


Figure 5: Uma estrutura por camadas dos nós.

Nós de uma Rede Neural

- RN com apenas camadas de entrada e de saída são chamadas de RN com camada simples
- Quando há uma camada escondida: *shallow or vanilla NN*
- Quando há duas ou mais camadas escondidadas: RN profunda

Camadas da Rede Neural

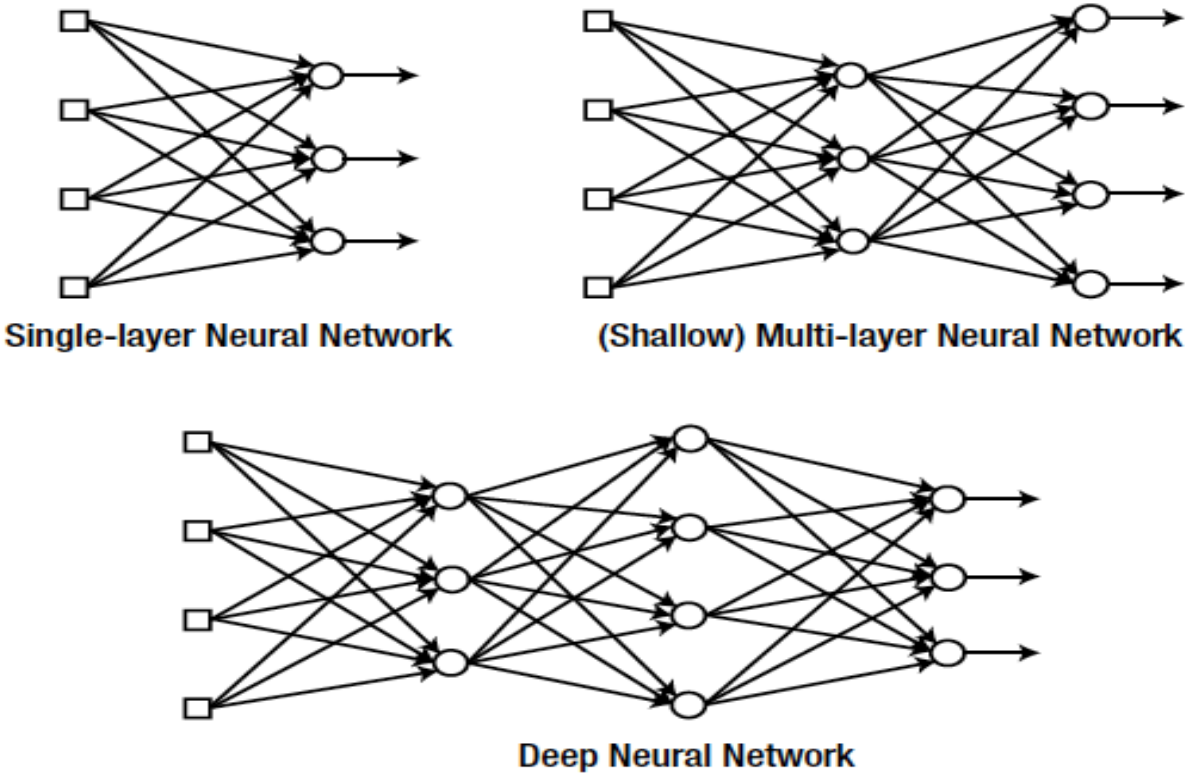


Figure 6: As definições de uma RN dependem da arquitetura das camadas.

Camadas da Rede Neural

(source: NASA Astronomy Picture of the Day)

Figure 7: Via Láctea.

Camadas da Rede Neural

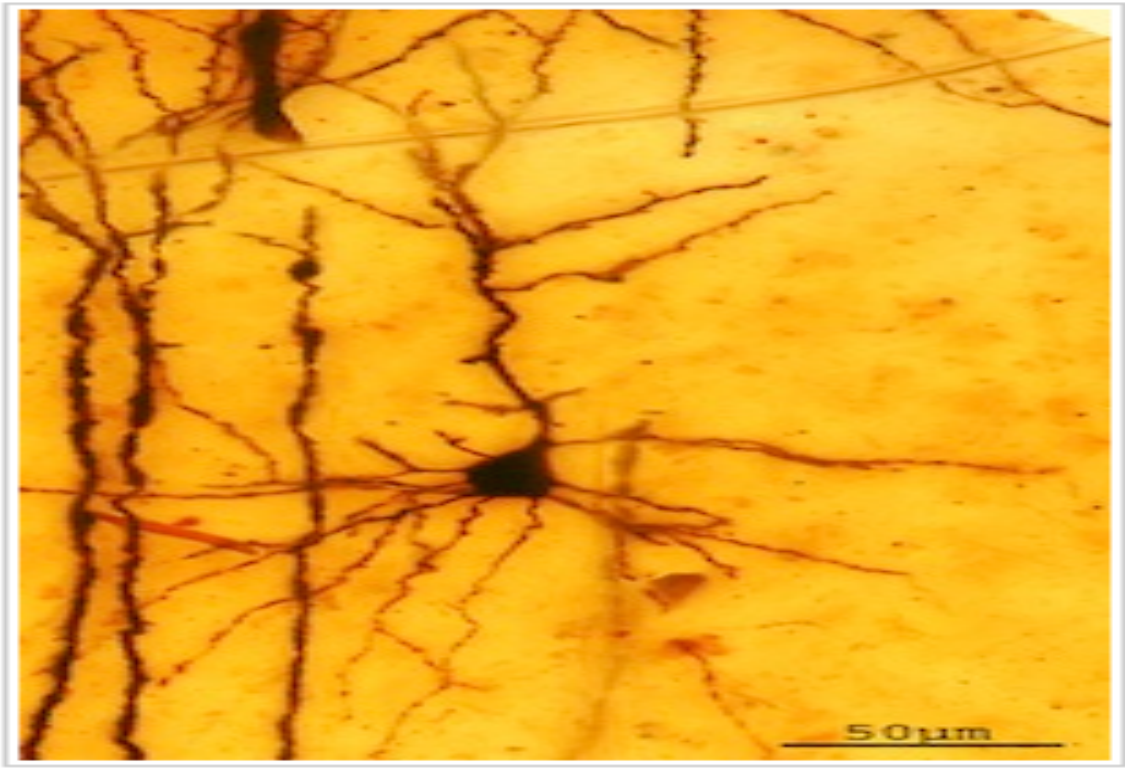


Figure 8: Neurônio.

Camadas da Rede Neural

- O cérebro é uma rede gigante de neurônios
- A RN é uma rede de nós
- Quantos neurônios, aproximadamente, temos no cérebro?

Camadas da Rede Neural

- O cérebro é uma rede gigante de neurônios
- A RN é uma rede de nós
- Quantos neurônios, aproximadamente, temos no cérebro?
- 86 bilhões de neurônios
- Quantas estrelas temos na Via Láctea?

Camadas da Rede Neural

- O cérebro é uma rede gigante de neurônios
- A RN é uma rede de nós
- Quantos neurônios, aproximadamente, temos no cérebro?
- 86 bilhões de neurônios
- Quantas estrelas temos na Via Láctea?
- Entre 200 e 400 bilhões

Camadas da Rede Neural

- Considere a seguinte RN com uma camada escondida:

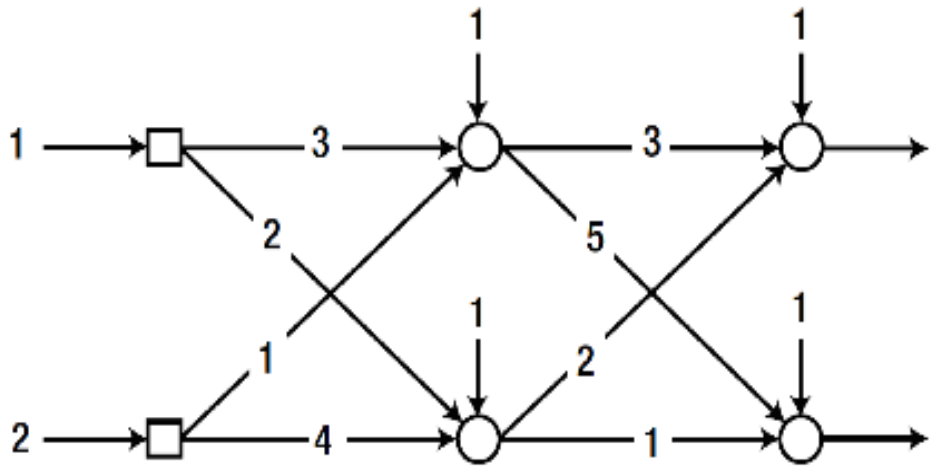


Figure 9: Rede neural com uma única camada escondida.

Camadas da Rede Neural

- Função de ativação:

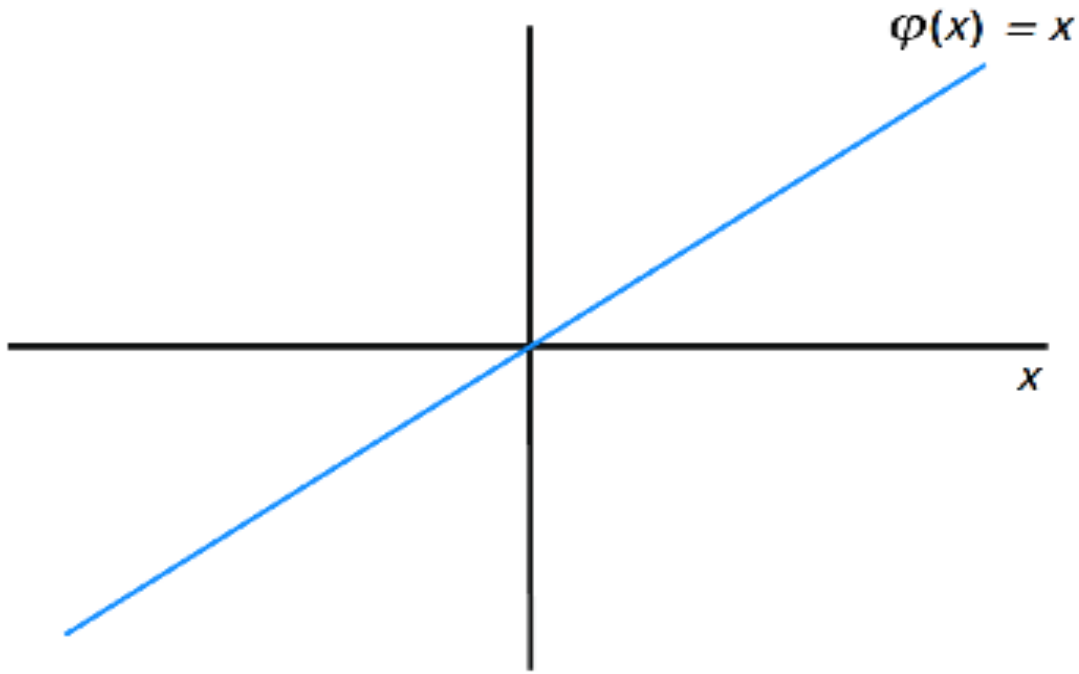


Figure 10: Função de ativação linear de cada nó.

Camadas da Rede Neural

- Calcule as saídas da seguinte rede neural:

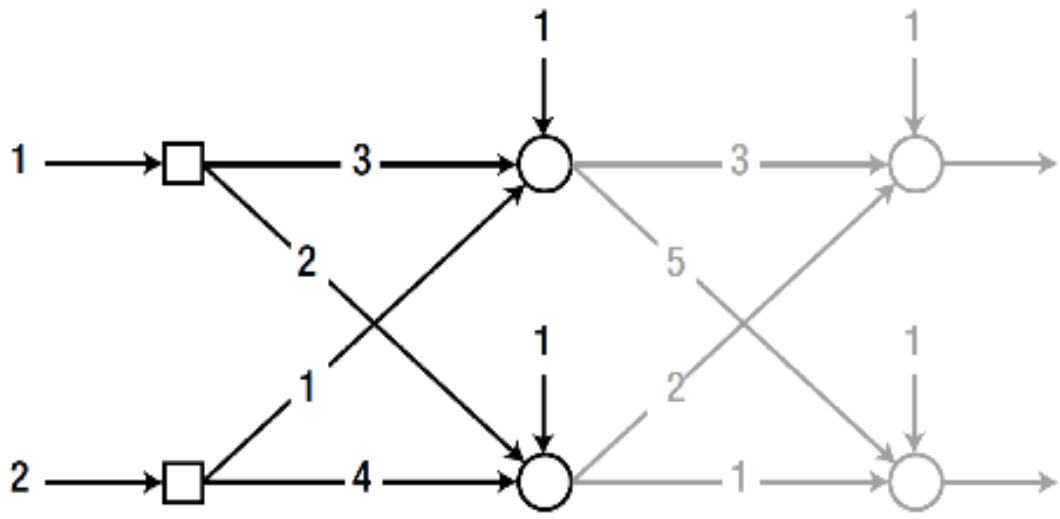


Figure 11: Cálculo da saída a partir da camada escondida.

Camadas da Rede Neural

- Soma ponderada, primeiro nó da camada escondida

$$\text{Soma ponderada:} \quad v = (3x1) + (1x2) + 1 = 6 \tag{5}$$
$$\text{Saída:} \quad y = \phi(v) = v = 6 \tag{6}$$

- Segundo nó da camada escondida

$$\text{Soma ponderada:} \quad v = (2x1) + (4x2) + 1 = 11 \tag{7}$$
$$\text{Saída:} \quad y = \phi(v) = v = 11 \tag{8}$$

Nós de uma Rede Neural

- A soma poderada: relação matricial

$$v = \begin{bmatrix} 3x1 + 1x2 + 1 \\ 2x1 + 4x2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$v = Wx + b \quad (10)$$

-

$$W = \begin{bmatrix} \text{pesos do primeiro nó} \\ \text{pesos do segundo nó} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nós de uma Rede Neural

- Cálculo das saídas da próxima camada:

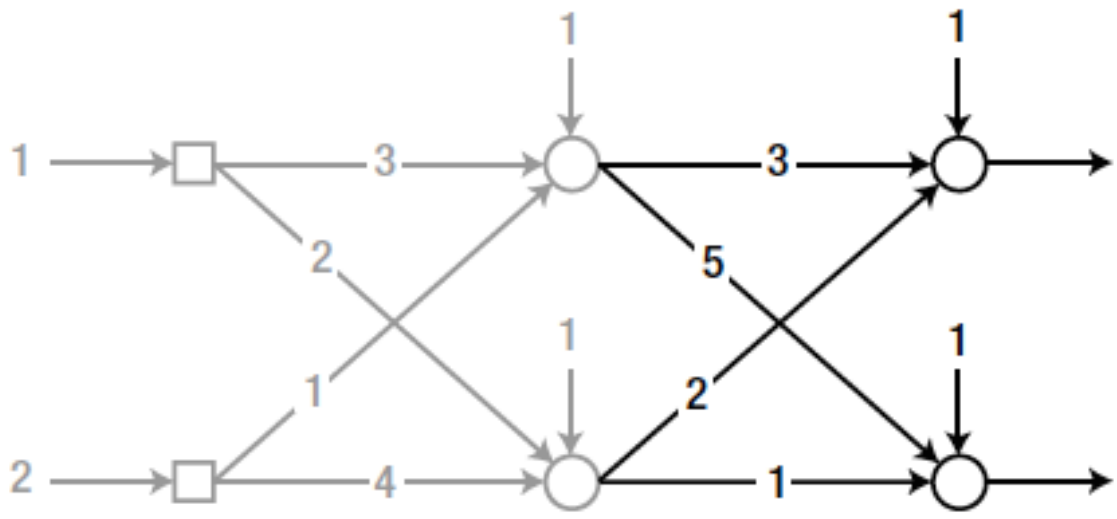


Figure 12: Camada oculta.

Nós de uma Rede Neural

- A soma poderada:

$$v = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 42 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- Saída da camada oculta:

$$v = \phi(v) = v = \begin{bmatrix} 41 \\ 42 \end{bmatrix} \tag{13}$$

- Simplicidade algébrica para tratar problemas complexos

Aprendizagem de máquina

- Consequência de se adotar a função de ativação linear

$$
\begin{aligned}
v &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (14) \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (15) \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (16) \\
&= \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} && (17)
\end{aligned}
$$

Aprendizagem de máquina

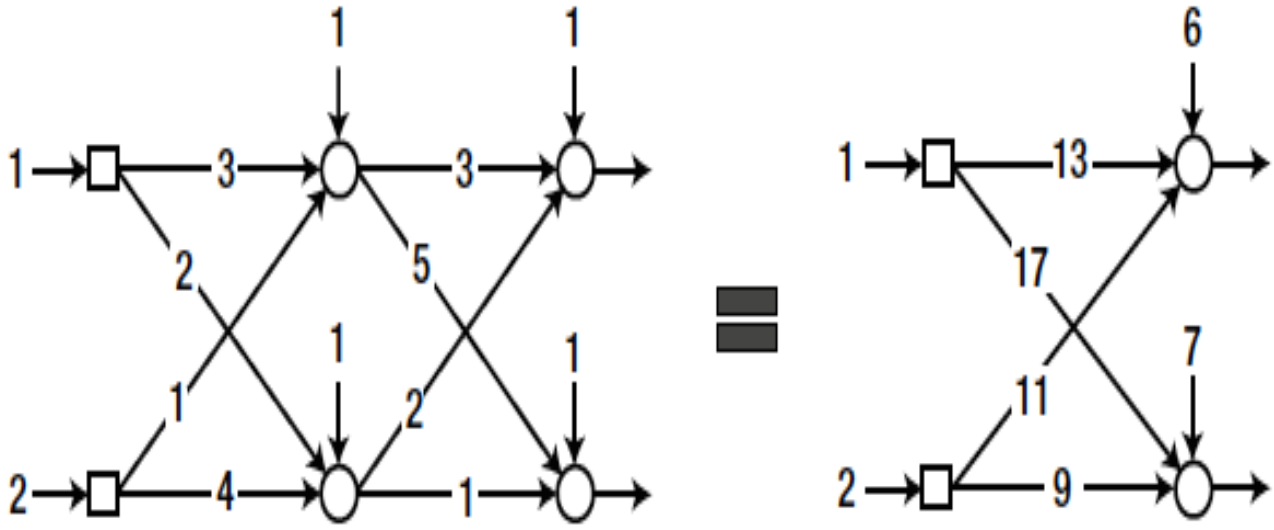


Figure 13: Equivalente a uma RN sem camada escondida.

Aprendizagem supervisionada

Procedimento para treinar uma RN supervisionada

1. Inicialize os pesos com valores adequados
2. Considere a entrada a partir dos dados de treinamento entrada, saída desejada. Insira esses dados na RN e calcule o erro da saída desejada
3. Ajuste os pesos para diminuir o erro
4. Repita os passos 2 e 3 para todos os dados de treinamento

Aprendizagem supervisionada

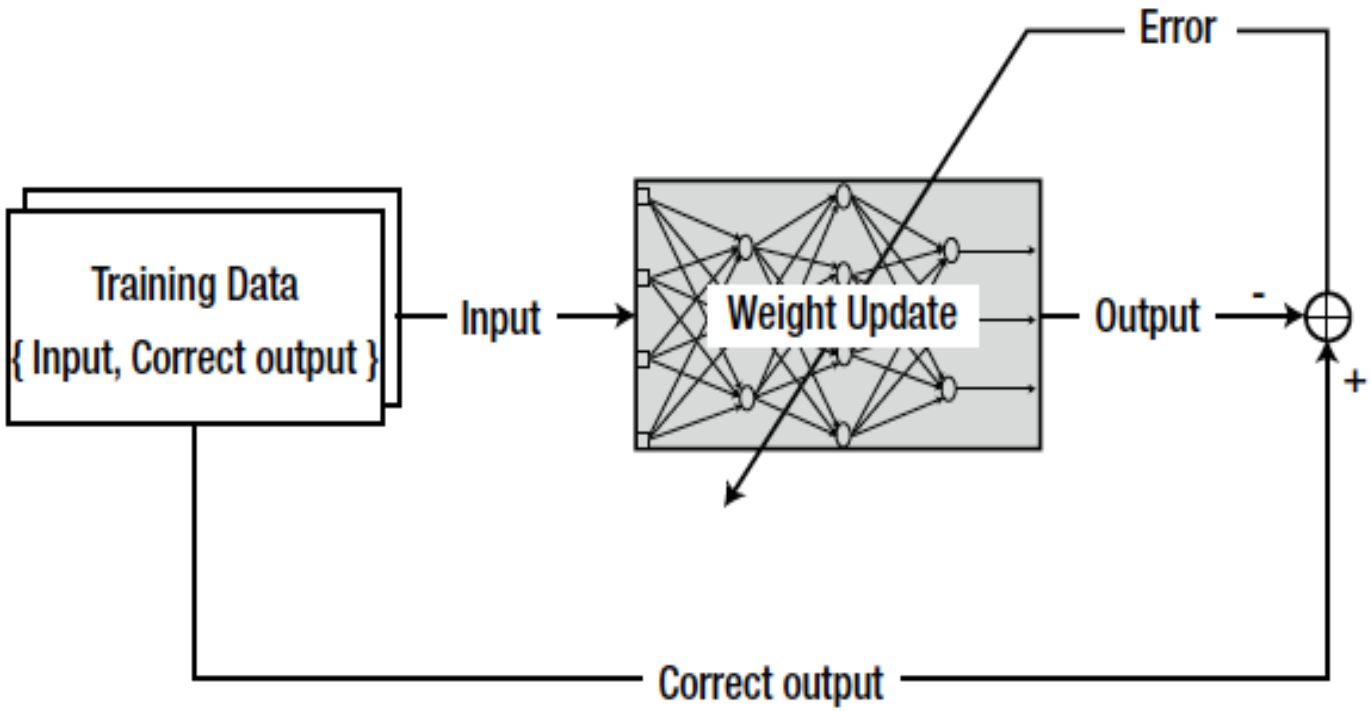


Figure 14: O conceito de rede supervisionada.

Treinamento de uma RN com uma camada

- Regra de aprendizagem é vital na pesquisa de RN
- Regra Delta: regra de aprendizagem representativa de uma RN com uma camada

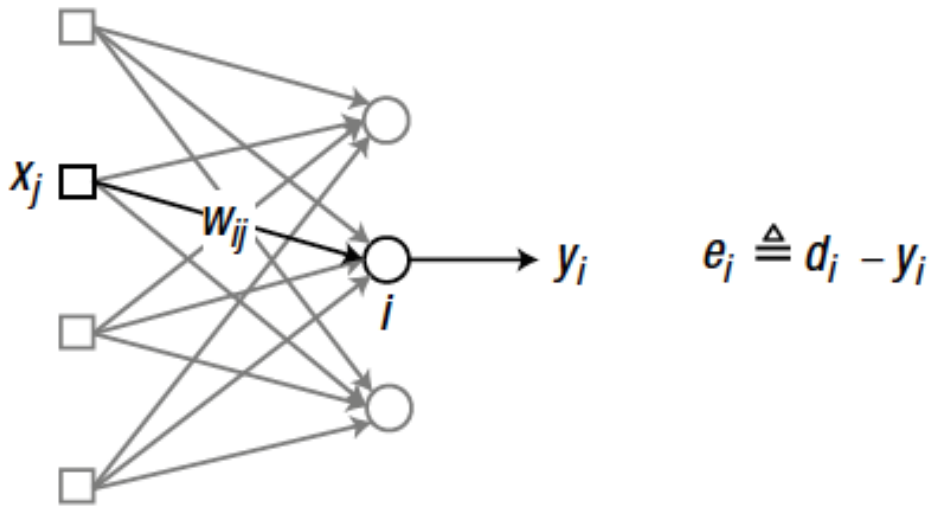


Figure 15: RN com uma camada

Treinamento de uma RN com uma camada

"Se um nó de entrada contribue para o erro do nó de saída, o peso entre os dois nós é ajustado em proporção ao valor da entrada, x_j e o erro de saída, e_i."

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} + \alpha e_i x_j \tag{18}$$

- x_j = saída do nó de entrada j, (j=1,2,3)
- e_i = erro do nó de saída i
- w_{ij} = peso entre o nó de saída i e o nó de entrada j
- α = taxa de aprendizagem $(0 < \alpha \leq 1)$
  (baixa, aprendizagem lenta / alta, aprendizagem rápida)

Exemplo

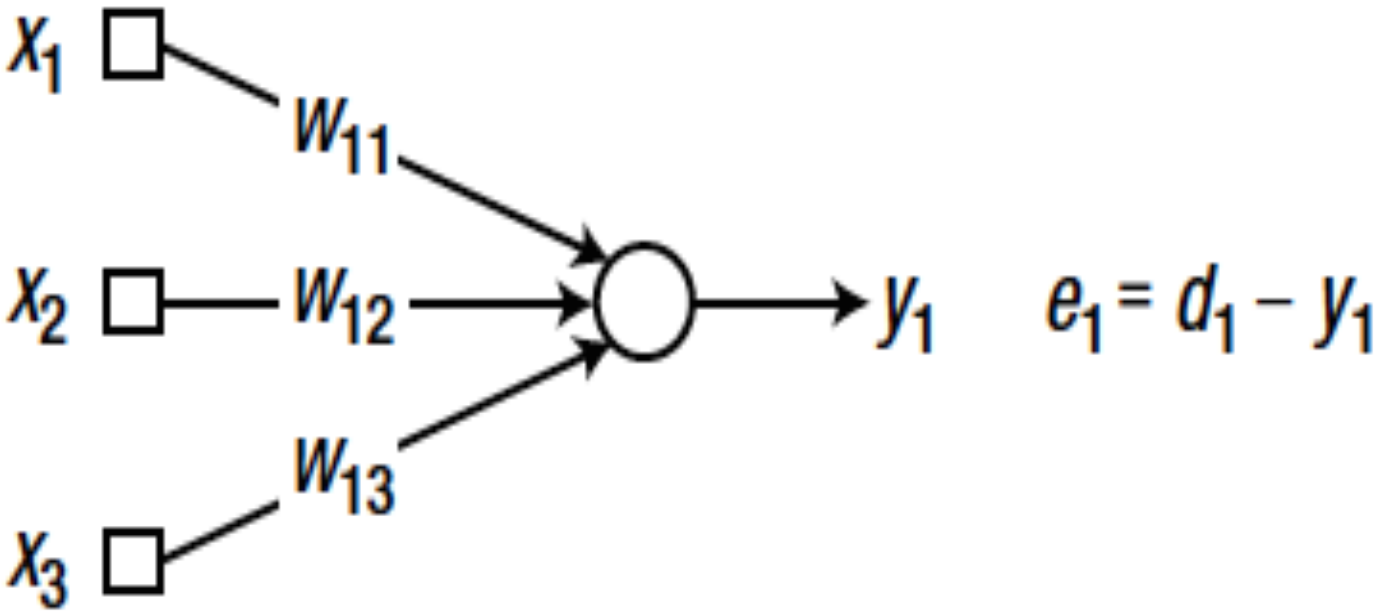


Figure 16: Rede neural com uma única camada com três nós de entrada e um nó de saída.

Exemplo

Regra delta

$$w_{11} \leftarrow w_{11} + \alpha e_1 x_1 \tag{19}$$

$$w_{12} \leftarrow w_{12} + \alpha e_1 x_2 \tag{20}$$

$$w_{13} \leftarrow w_{13} + \alpha e_1 x_3 \tag{21}$$

Resumo do processo de treinamento usando a regra delta para uma rede com uma única camada

- 1. Inicialize os pesos com valores adequados
- 2. Considere x_i, d_i e calcule

$$e_i = d_i - y_i$$

- 3. Calcule as taxas de ajuste dos pesos

$$\Delta w_{ij} = \alpha e_i x_j$$

- 4. Ajuste os peso com

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} + \Delta w_{ij} \tag{22}$$

- 5. Execute os passos 2-4 para todos os dados de treinamento
- 6. Repita os passos 2-5 até que o erro alcance um nível de tolerância aceitável

Gradiente descendente

- Época: número de iterações de treinamento
- Exemplo: época $= n$ significa que a rede neural repete o processo de treinamento n vezes com o mesmo conjunto de dados
- A regra delta é o método do gradiente descendente

Regra delta generalizada

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} + \alpha_i \delta_i x_j \tag{23}$$

$$\delta_i = \dot{\phi}(v_i) e_i \tag{24}$$

- $e_i =$ erro do nó de saída i
- $v_i =$ soma ponderada do nó de saída i
- $\dot{\phi} =$ derivada da função de ativação ϕ do nó de saída i

Gradiente descendente

- Considerando a função de ativação linear $\phi(x) = x$, $\dot{\phi}(x) = 1$, então

$$\delta_i = e_i$$

- Função de ativação sigmoidal

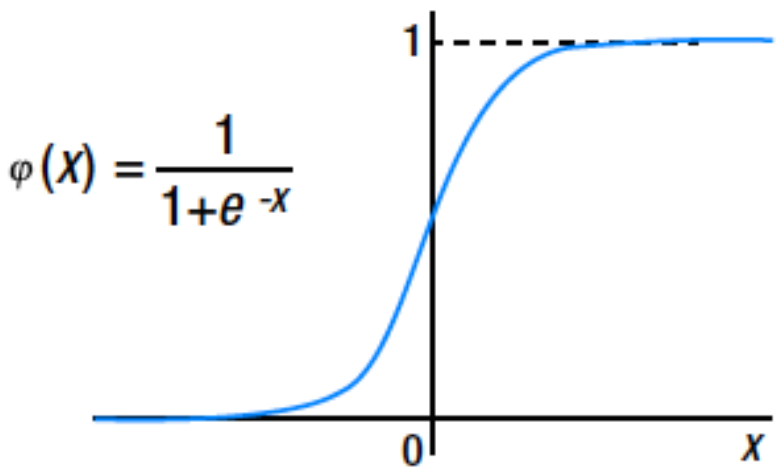


Figure 17: Função sigmoidal

Gradiente descendente

- Derivada da função sigmoidal

$$\dot{\phi}(x) = \frac{0 * (1 + e^{-x}) - (0 - e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{(1 + e^{-x})} \times \left(1 - \frac{1}{(1 + e^{-x})}\right) \quad (26)$$

$$= \phi(x)(1 - \phi(x)) \quad (27)$$

- Regra delta e ajustes dos pesos

$$\delta_i = \dot{\phi}_i(v_i)e_i = \phi(v_i)(1 - \phi(v_i))e_i$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} + \phi(v_i)(1 - \phi(v_i))e_i x_j$$

Método Gradiente Descendente Estocástico (GDE)

- Calcula o erro para cada dado de treinamento e ajusta os pesos imediatamente
- Se tivermos n pontos de dados de treinamento o GDE ajusta os pesos n vezes

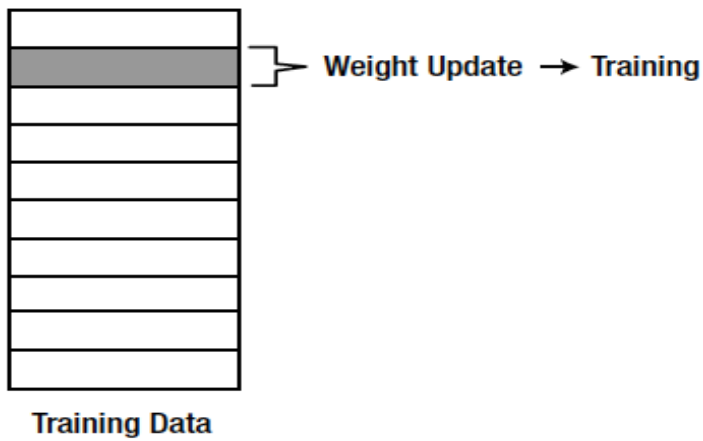


Figure 18: Como o ajuste dos pesos do GDE está relacionado com o conjunto dos dados de treinamento

Método Gradiente Descendente Estocástico (GDE)

- O GDE calcula os ajustes dos pesos com

$$\Delta w_{ij} = \alpha \delta_i x_j$$

Método *batch*

- No método *batch*, cada ajuste de peso é calculado para todos os erros dos dados de treinamento
- A média dos ajustes dos pesos é usada para ajustar os pesos

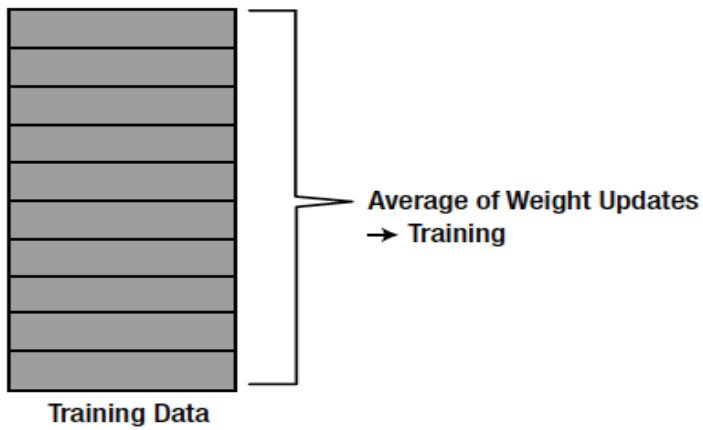


Figure 19: O método *batch* calcula o ajuste dos pesos e processo de trainamento.

Método *batch*

- Utiliza todos dados de treinamento e ajusta os pesos uma úncia vez
- O cálculo dos pesos é feito da seguinte maneira:

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Delta w_{ij}(k)$$

  sendo $\Delta_{ij}(k)$ é o ajuste do peso para o k-ésimo dado de treinamento e n é o número total dos dados de treinamento
- Cálculo da média dos ajustes dos pesos: maior consumo de tempo

Método *batch*

- Utiliza todos dados de treinamento e ajusta os pesos uma úncia vez
- O cálculo dos pesos é feito da seguinte maneira:

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Delta w_{ij}(k)$$

  sendo $\Delta_{ij}(k)$ é o ajuste do peso para o k-ésimo dado de treinamento e n é o número total dos dados de treinamento
- Cálculo da média dos ajustes dos pesos: maior consumo de tempo

Exemplo 1

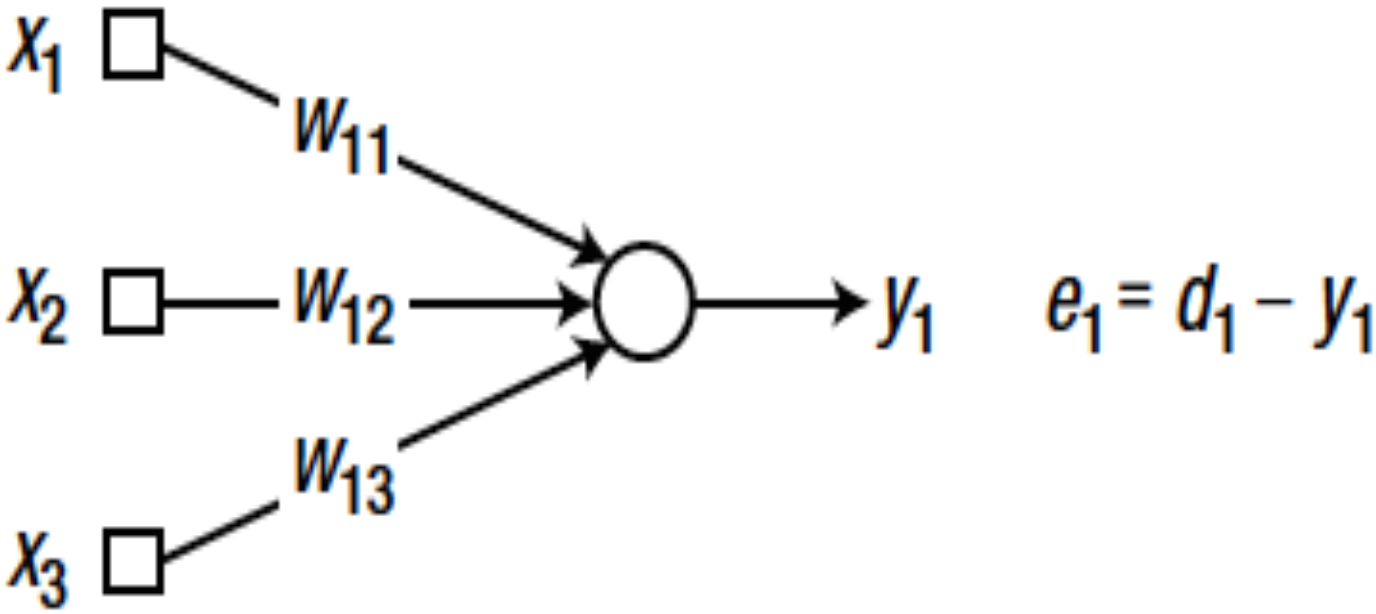


Figure 20: Rede neural com uma única camada com três nós de entrada e um nó de saída.

Exemplo 1

x_1	x_2	x_3	d_i
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

- Regra delta - função sgmoidal

$$\begin{aligned} \delta_i &= \phi(v_i)(1-\phi(v_i))e_i \\ \Delta w_{ij} &= \alpha \delta_i x_j \\ w_{ij} &\leftarrow w_{ij} + \Delta w_{ij} \end{aligned}$$

- Aplicação dos métodos GDE e *batch*

Exemplo 1

Método do Gradiente Descendente Estocástico

- This program calls in the function DeltaBatch.m for supervised training of a neural network.

clear all clc

X = [0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1]; D = [0; 0; 1; 1];

W = 2*rand(1, 3) - 1;

- Training (adjusting weights):
for epoch = 1:10000
W = DeltaBatch(W, X, D);
end

- Inference:
N = 4;
y = zeros(N,1);
for k = 1:N
x = X(k, :)';
v = W*x;
y(k) = Sigmoid(v); - obtained
output.
end
disp('Results:'); disp(' [desired neuron$_o utput]'$); $disp([Dy])$;

function W = DeltaBatch(W, X, D)
alpha = 0.9;
dWsum = zeros(3, 1);
N = 4;
for k = 1:N

$$
\begin{aligned}
x &= X(k,:)'; \\
d &= D(k); \\
v &= W * x; \\
y &= Sigmoid(v); \\
e &= d - y; \\
delta &= y * (1 - y) * e; \\
dW &= alpha * delta * x; \\
dWsum &= dWsum + dW;
\end{aligned}
$$

end
dWavg = dWsum/N;
W(1) = W(1) + dWavg(1);
W(2) = W(2) + dWavg(2);
W(3) = W(3) + dWavg(3);
end

```
function y = Sigmoid(x)
y = 1 / (1 + exp(-x));
end
```

Resultado:

saída real	d_i
0.0102	0
0.0083	0
0.9932	1
0.9917	1

w_1	w_2	w_3
9.5649	-02084	-4.5752

Exemplo 1

Método *Batch*

Exemplo 1

- This program calls in the function DeltaBatch.m for supervised training of a neural network.

```
clear all; clc

X = [0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1]; D = [0; 0; 1; 1];

W = 2*rand(1, 3) - 1;

for epoch = 1:40000
W = DeltaBatch(W, X, D);
end
- Inference:
N = 4;
y = zeros(N,1);
for k = 1:N
x = X(k, :)';
v = W*x;
y(k) = Sigmoid(v);
end

disp('Results:');
disp('[desired neuron-output]');
disp([D y]);
```

Exemplo 1

```
function W = DeltaBatch(W, X, D);
alpha = 0.9;
dWsum = zeros(3, 1);
N = 4;
for k = 1:N
x = X(k, :)';
d = D(k);
v = W*x;
y = Sigmoid(v);
e = d - y;
delta = y*(1-y)*e;
dW = alpha*delta*x;
dWsum = dWsum + dW;
end
dWavg = dWsum/N;
W(1) = W(1) + dWavg(1);
W(2) = W(2) + dWavg(2);
W(3) = W(3) + dWavg(3);
end
```

Resultado:

saída real	d_i
0.0102	0
0.0083	0
0.9932	1
0.9917	1

w_1	w_2	w_3
9.5642	-02088	-4.5746

Comparação entre GDE e *Batch*
Erros médios

Exemplo 1

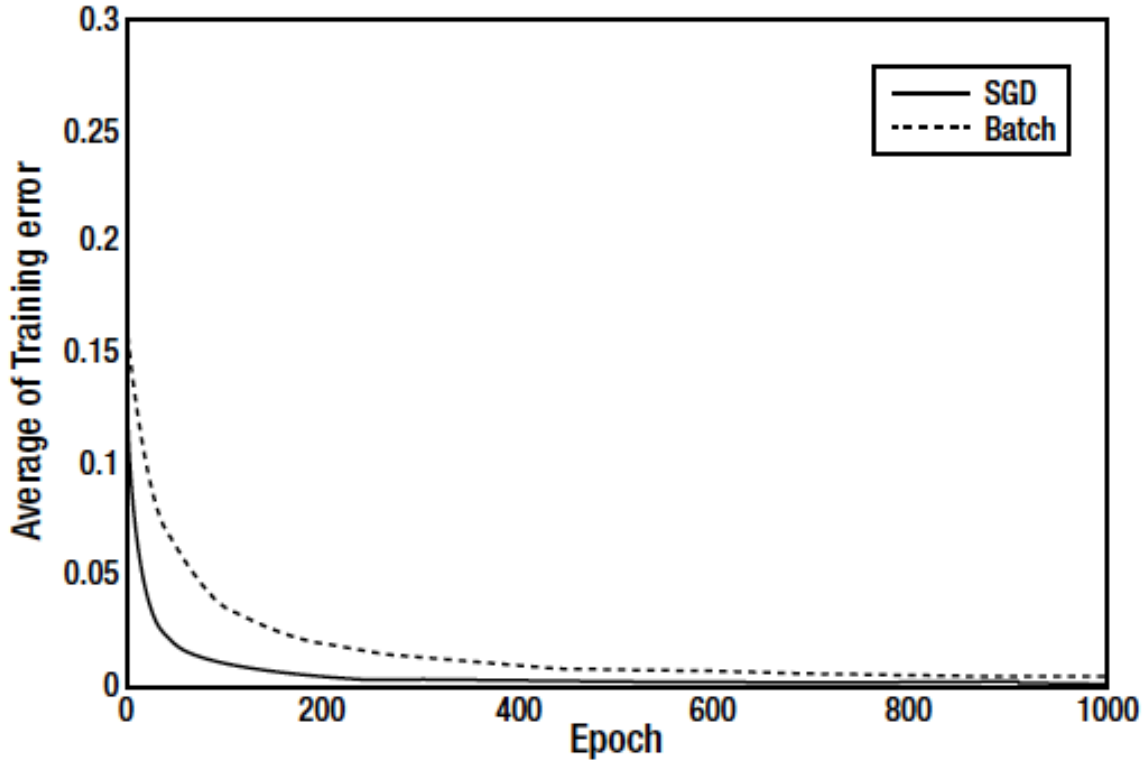


Figure 21: O método Gradiente Descendente Estocástico aprende mais rápido que o método *Batch*.

Exemplo 1

- The weights of both methods are initialized with the same values.

```
X = [0 0 1;
0 1 1;
1 0 1;
1 1 1];
D = [0; 0; 1; 1];
E1 = zeros(1000, 1);
E2 = zeros(1000, 1);
W1 = 2*rand(1, 3) - 1;
W2 = W1;
        for epoch = 1:1000
        W1 = DeltaSGD(W1, X, D);
        W2 = DeltaBatch(W2, X, D);
        es1 = 0;
        es2 = 0;
        N = 4;
            for k = 1:N
            x = X(k, :)';
            d = D(k);
            v1 = W1*x;
            y1 = Sigmoid(v1);
            es1 = es1 + (d - y1)^2;
            v2 = W2*x;
            y2 = Sigmoid(v2);
            es2 = es2 + (d - y2)^2;
            end
        E1(epoch) = es1/N;
        E2(epoch) = es2/N;
       end
```

```
plot(E1, 'r', 'LineWidth', 1.5)
hold on
plot(E2, 'b:', 'LineWidth', 1.5)
xlabel('Epoch')
ylabel('Average of Training error')
legend('SGD', 'Batch')
```

Limitações das RNs com camadas simples

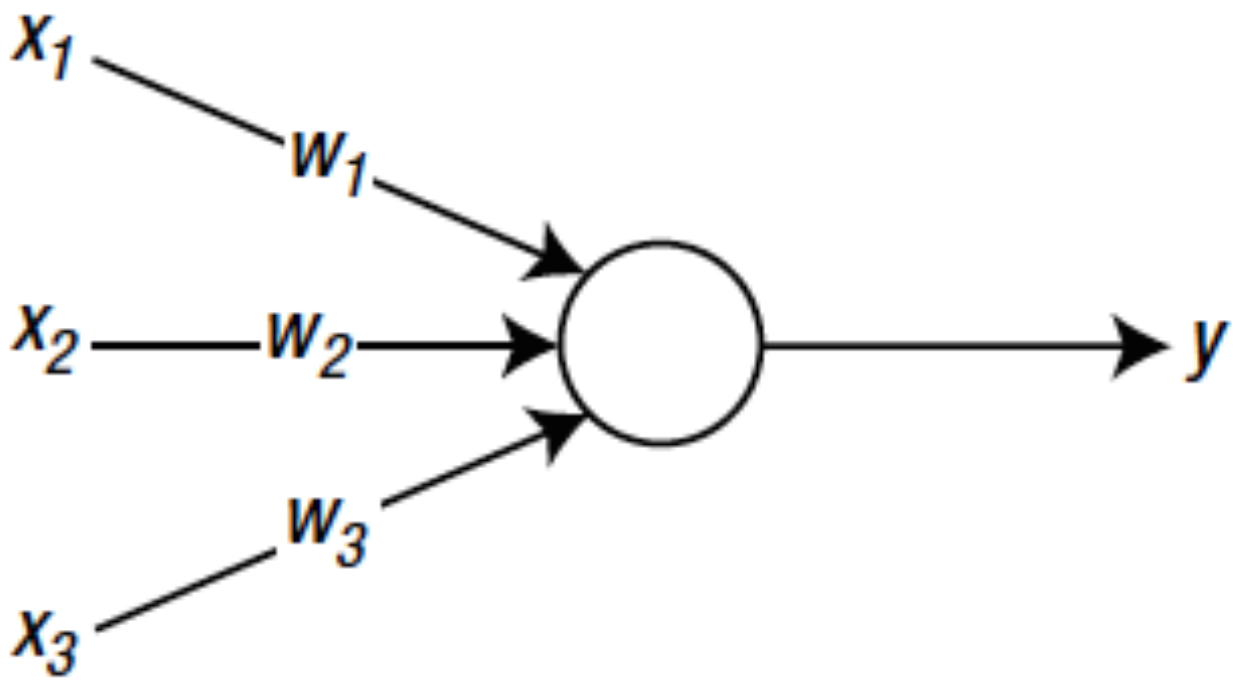


Figure 22: Rede neural com uma única camada.

Limitações das RNs com camadas simples

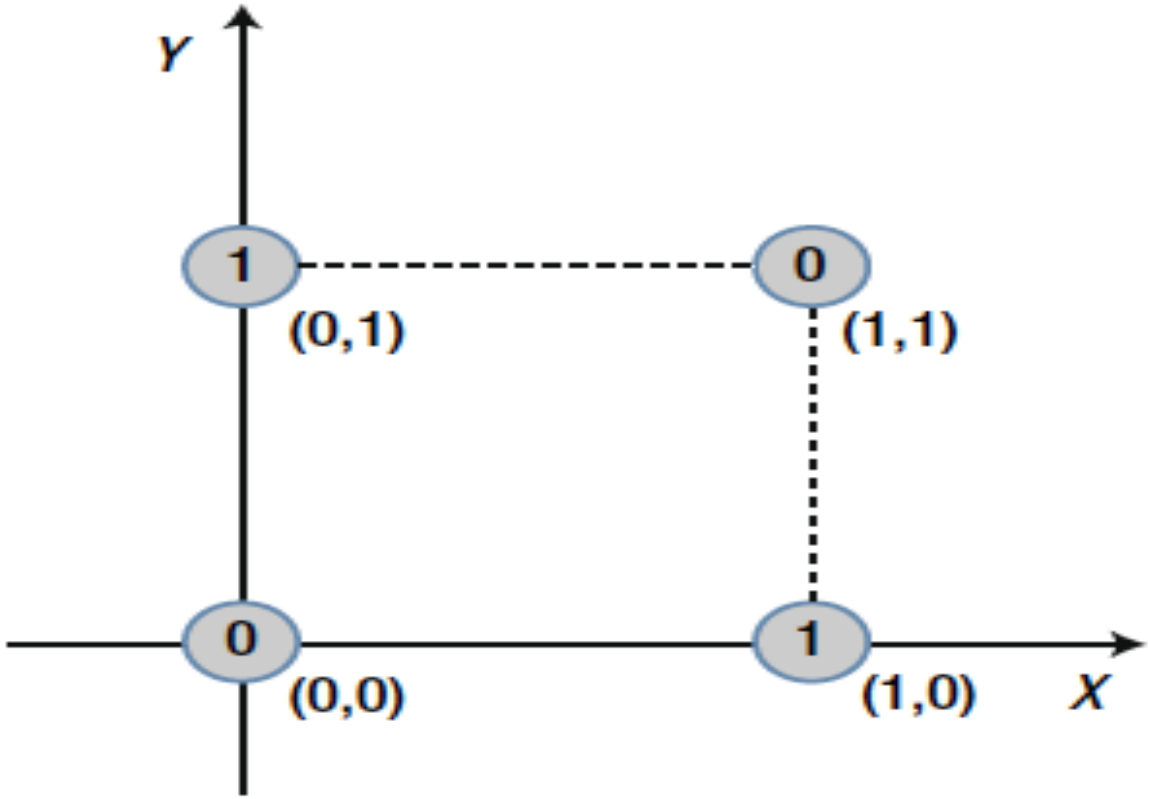


Figure 23: Interpretando os três valores dos dados de entrada com as coordenadas X, Y e Z.

Limitações das RNs com camadas simples

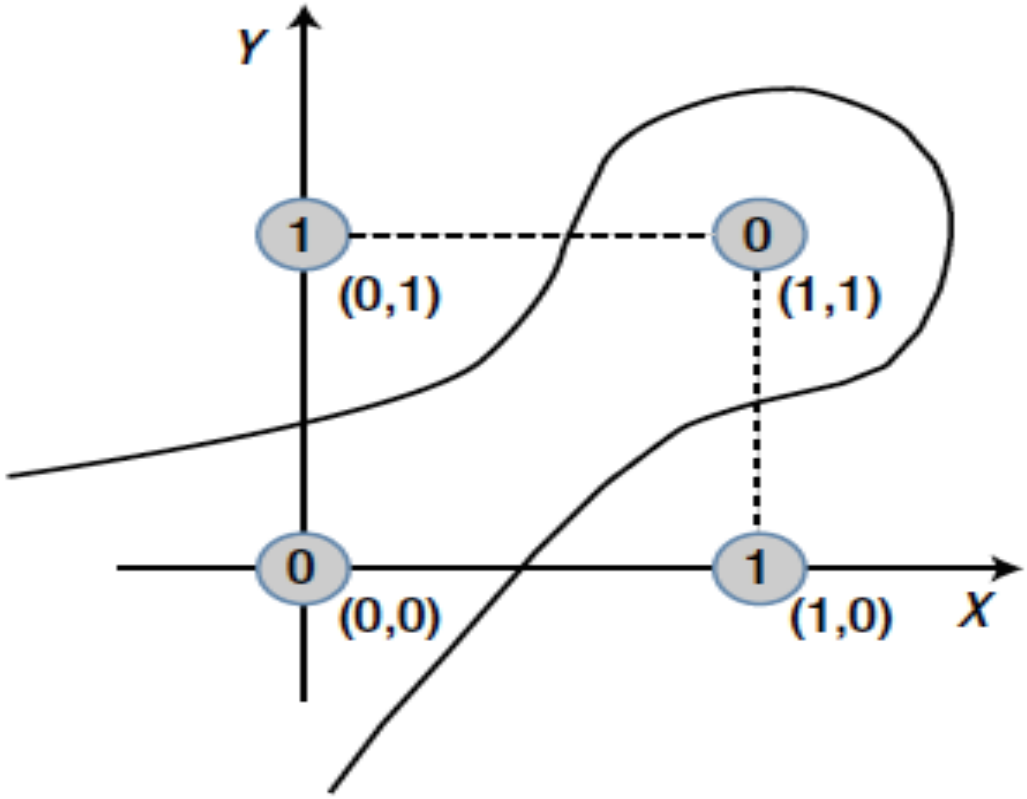


Figure 24: Separação das regiões 0 e 1 - Curva complicada.

Limitações das RNs com camadas simples

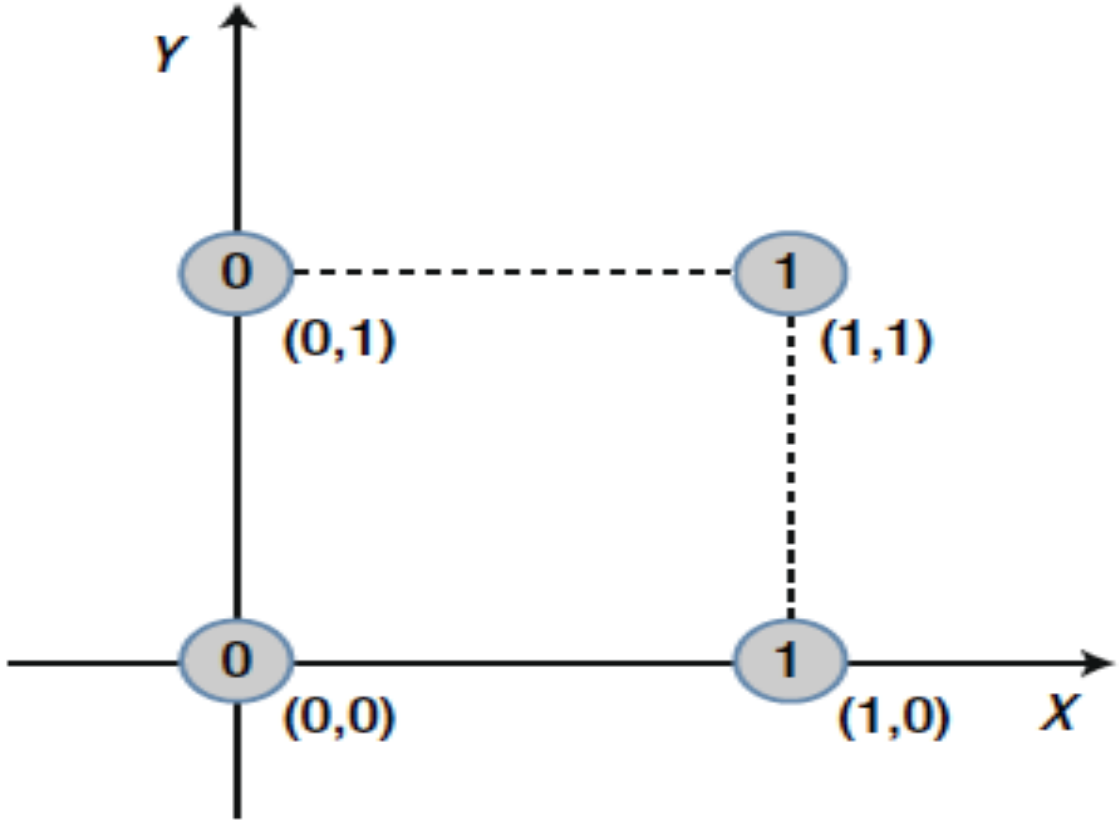


Figure 25: Dados de treinamento para a regra Delta.

Limitações das RNs com camadas simples

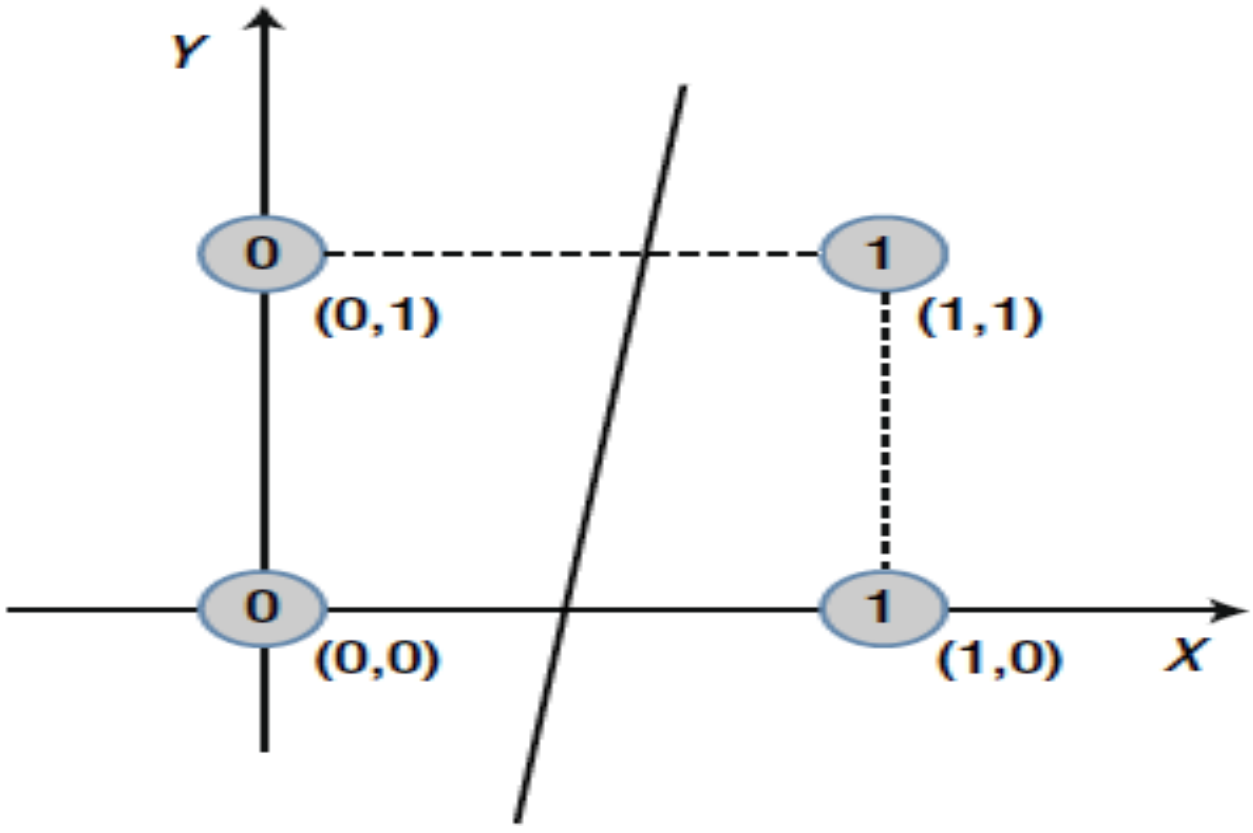


Figure 26: Problema de dados linearmente separáveis. Se não for separável, a RN necessita mais camadas.

Treinamento de uma RN com múltiplas camadas

RN com múltiplas camadas

- Consegue classificar classes não linearmente separáveis (limitação da RN com uma única camada);
- Presença de camadas escondidas (intermediárias):
  - Neurônios escondidos extraem a maior parte das informações contidas nas amostras;
- Principais aplicações: **classificador**, aproximador de funções, otimização, previsão de séries temporais, identificação e controle de processos;
- Treinamento supervisionado: algoritmo **back-propagation**.

Algoritmo back-propagation

- A regra Delta sozinha não consegue treinar uma RN multicamadas:
  - Não são definidos erros para camadas escondidas;
- O algoritmo back-propagation define os erros para as camadas escondidas:
  - Uma vez definidos esses erros, a regra Delta pode ser usada para ajustar os pesos em cada camada;
- Os sinais de entrada e erro de saída fluem em sentidos contrários:
  - Sinais de entrada $\rightarrow$ sentido direto (*forward propagation*);
  - Sinais de erro de saída $\rightarrow$ sentido reverso (*backward propagation*).

Algoritmo back-propagation

Considere a seguinte RN multicamadas com dois neurônios na camada escondida e dois neurônios na camada de saída:

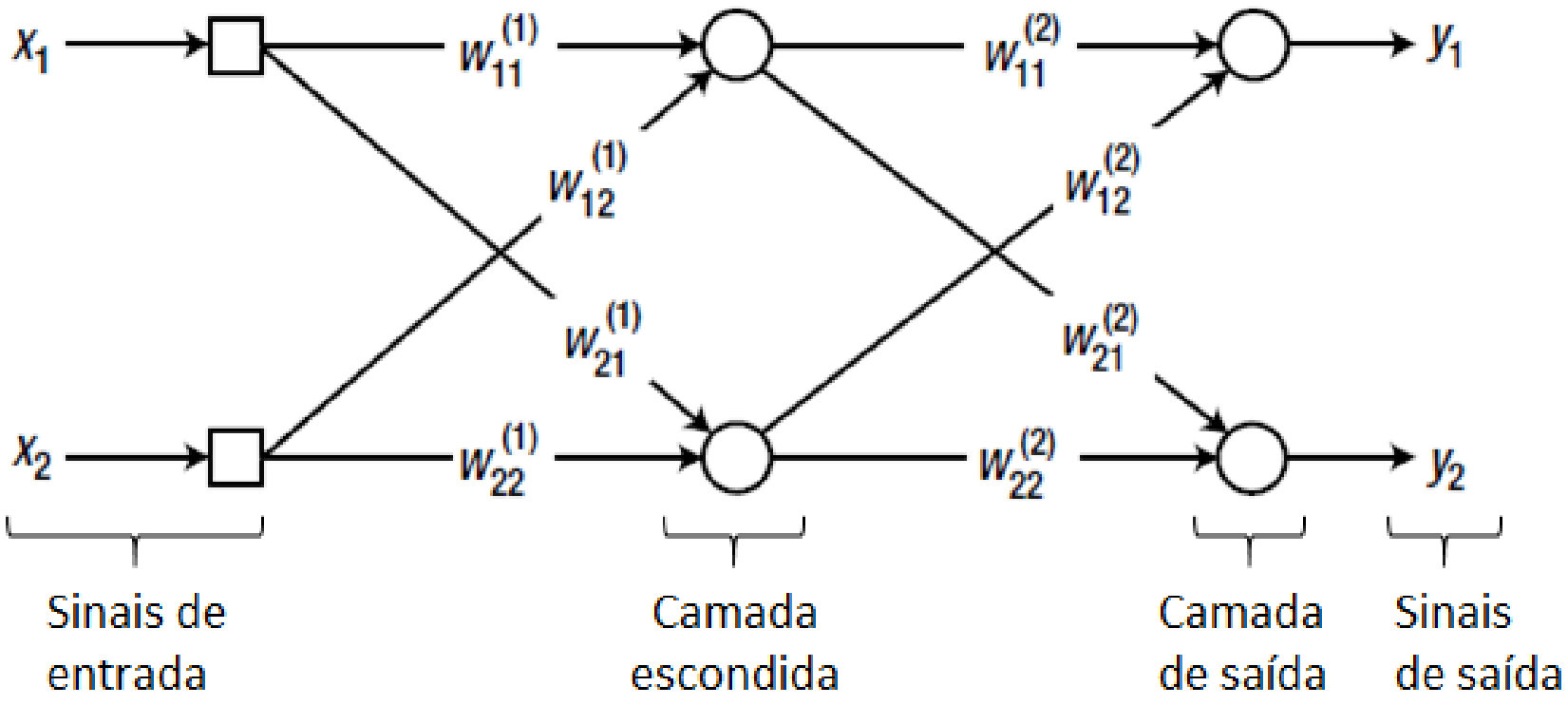


Figure 27: RN multicamadas com uma camada escondida. Fonte: [1].

Algoritmo back-propagation

1°: propagar o sinal de entrada $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ pela camada intermediária.

$$\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(1)} & w_{12}^{(1)} \\ w_{21}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = W_1 x,$$

e então:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi\left(v_1^{(1)}\right) \\ \varphi\left(v_2^{(1)}\right) \end{bmatrix},$$

onde $\varphi(.)$ é a função de ativação, $y_i^{(k)}$ é a saída do i-ésimo neurônio da k-ésima camada, $w_{ji}^{(k)}$ é o peso que conecta o j-ésimo neurônio da k-ésima camada neural ao i-ésimo neurônio da camada anterior.
(Perceba que se $k = 1$, $w_{ji}^{(1)}$ conecta os neurônios da 1^a camada escondida aos sinais de entrada.)

Algoritmo back-propagation

2°: propagar as saídas da camada escondida para obter os sinais de saída da rede.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} \\ w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = W_2 y^{(1)},$$

e então:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(v_1) \\ \varphi(v_2) \end{bmatrix},$$

onde y_i é a saída do i-ésimo neurônio da camada de saída.

Algoritmo back-propagation

3°: calcular os erros e δ_i (o mesmo da regra Delta) da camada de saída.

$$e_1 = d_1 - y_1, \qquad e_2 = d_2 - y_2,$$
$$\delta_1 = \varphi'(v_1)e_1, \qquad \delta_2 = \varphi'(v_2)e_2,$$

onde e_i é o erro obtido pelo i-ésimo neurônio da camada de saída, d_i é o valor desejado e $\varphi'(.)$ é a derivada da função de ativação.

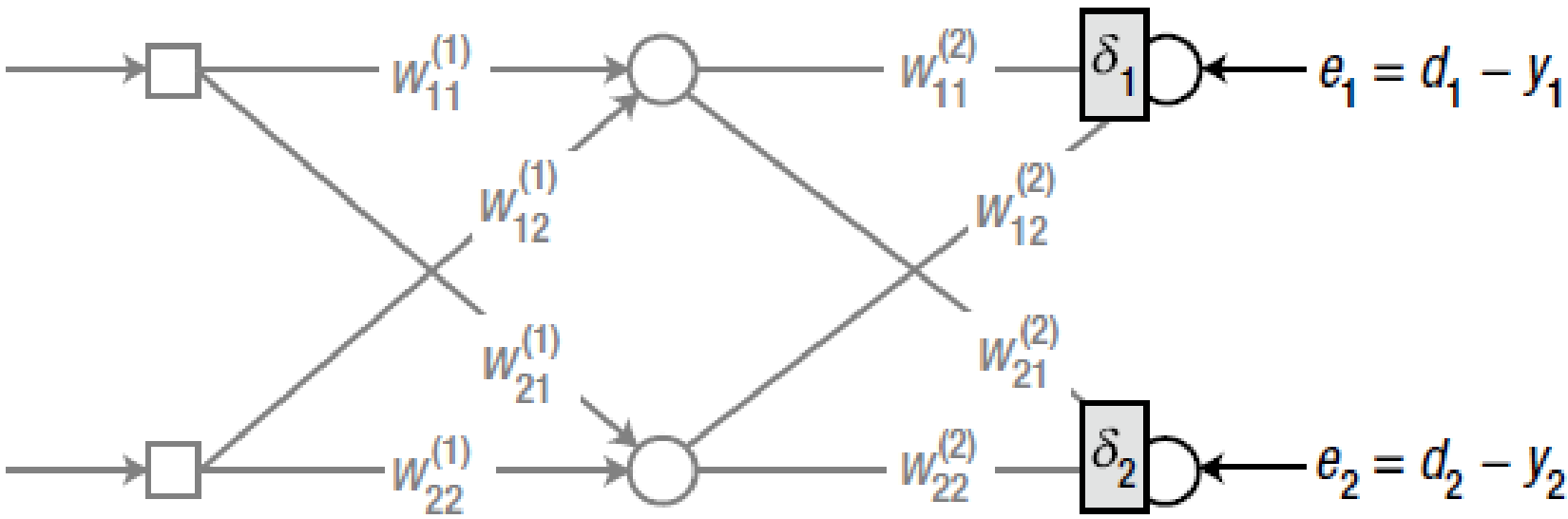


Figure 28: RN multicamadas com os δs do back-propagation. Fonte: [1].

Algoritmo back-propagation

4°: calcular os erros e δ_i (o mesmo da regra Delta) da camada escondida.

$$e_1^{(1)} = w_{11}^{(2)}\delta_1 + w_{21}^{(2)}\delta_2, \qquad e_2^{(1)} = w_{12}^{(2)}\delta_1 + w_{22}^{(2)}\delta_2,$$
$$\delta_1^{(1)} = \varphi'\left(v_1^{(1)}\right) e_1^{(1)}, \qquad \delta_2^{(1)} = \varphi'\left(v_2^{(1)}\right) e_2^{(1)},$$

onde $v_1^{(1)}$ e $v_2^{(1)}$ foram determinados no 1° passo.

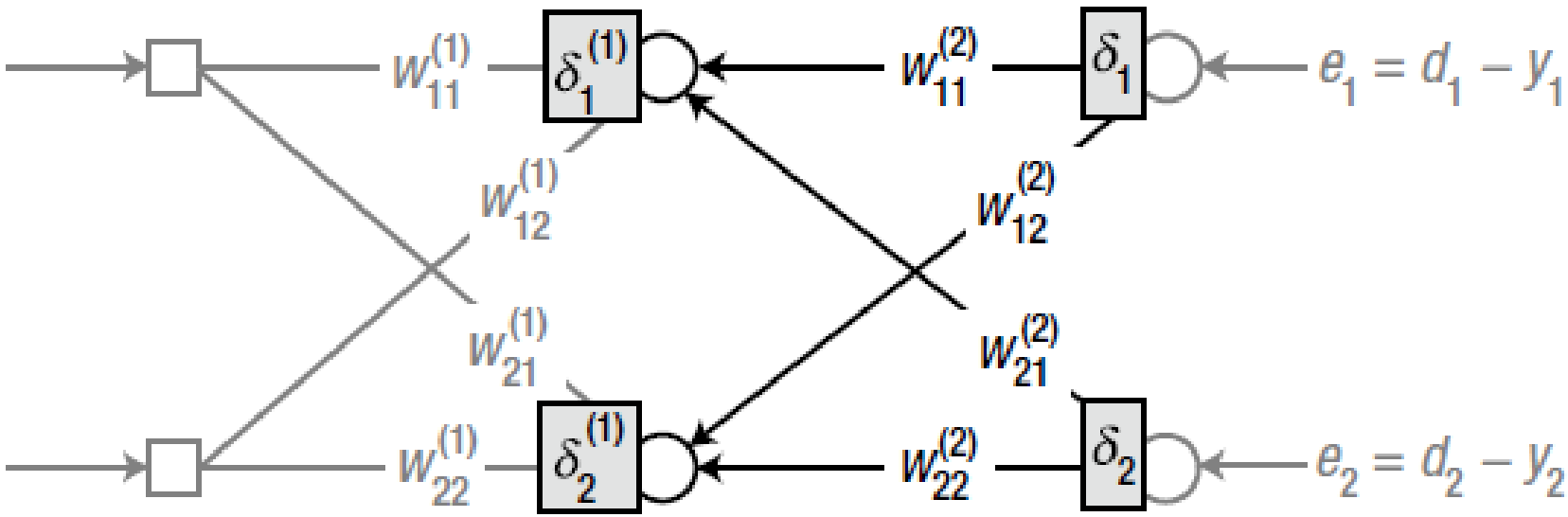


Figure 29: RN com δs do back-propagation na camada escondida. Fonte: [1].

Algoritmo back-propagation

Perceba que $e_1^{(1)}$ e $e_2^{(1)}$ podem ser calculados por:

$$\begin{bmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{21}^{(2)} \\ w_{12}^{(2)} & w_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = W_2^T \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{útil para implementação.}$$

Obs.: se existirem mais camadas escondidas com diferentes números de neurônios, o mesmo processo se repete para cada uma delas e os respectivos deltas são calculados.

Algoritmo back-propagation

5°: ajustar os pesos sinápticos da k-ésima camada neural.

$$\Delta w_{ji}^{(k)} = \alpha \delta_i^{(k)} x_{ji},$$

$$w_{ji}^{(k)} \leftarrow w_{ji}^{(k)} + \Delta w_{ji}^{(k)},$$

onde x_{ji} é o sinal que multiplica o peso $w_{ji}^{(k)}$ e α é a taxa de aprendizagem tal que $\alpha \in (0, 1]$.

Algoritmo back-propagation

Exemplo: ajuste dos pesos $w_{21}^{(2)}$ e $w_{11}^{(1)}$.

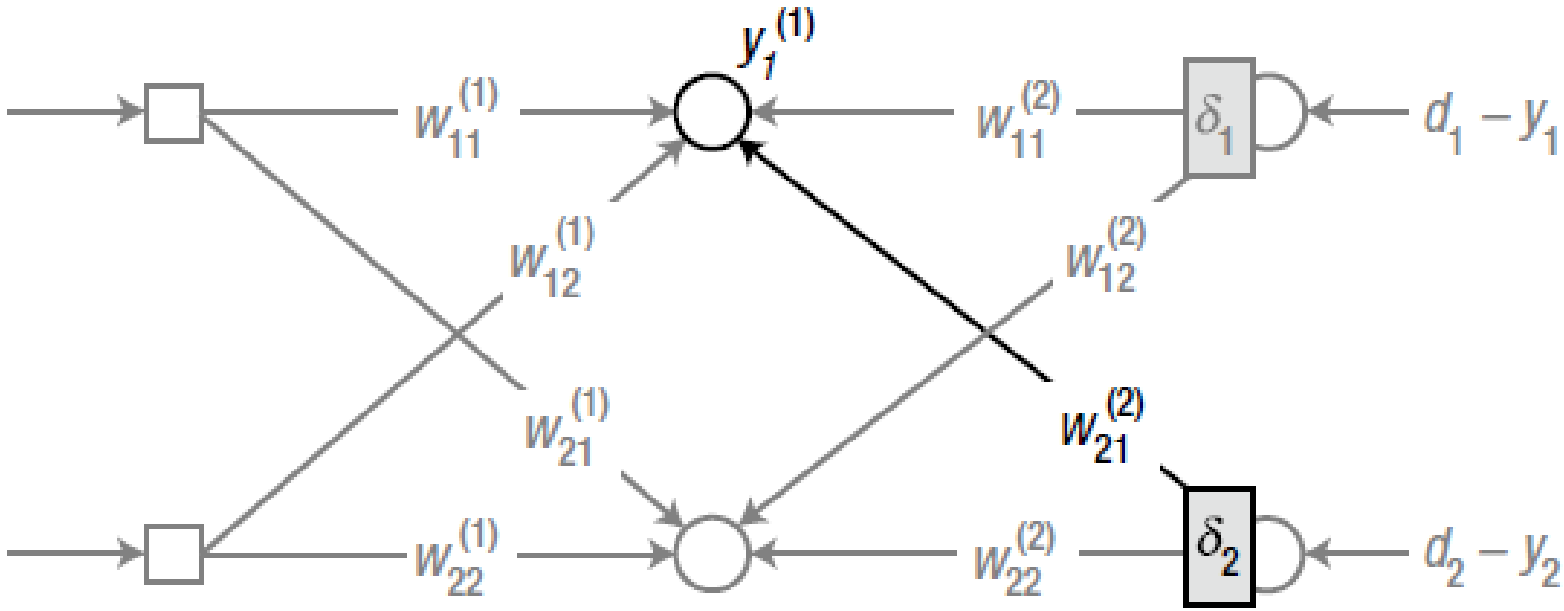


Figure 30: Ajuste de $w_{21}^{(2)}$. Fonte: [1].

Ajuste:

$$\Delta w_{21}^{(2)} = \alpha \delta_2 y_1^{(1)}, \qquad w_{21}^{(2)} \leftarrow w_{21}^{(2)} + \Delta w_{21}^{(2)},$$

onde $y_1^{(1)}$ é a saída do primeiro nó da camada escondida.

Algoritmo back-propagation

Continuação.

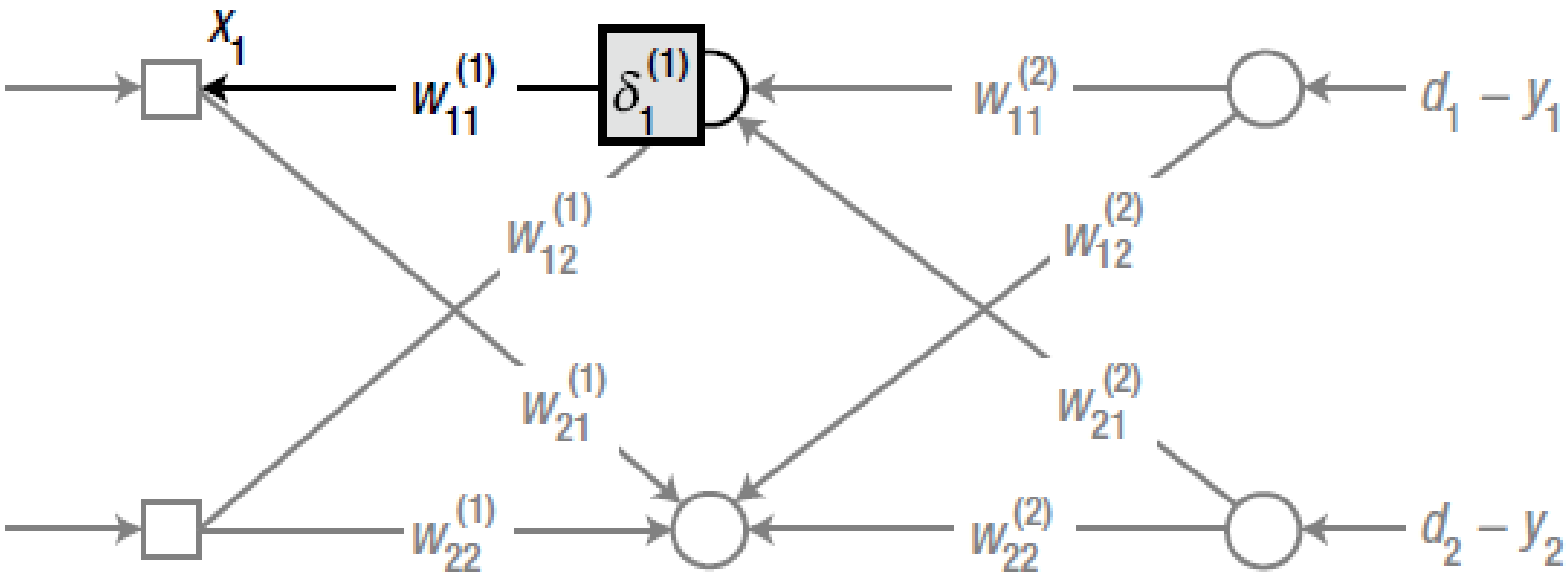


Figure 31: Ajuste de $w_{11}^{(1)}$. Fonte: [1].

Ajuste:

$$\Delta w_{11}^{(1)} = \alpha \delta_1^{(1)} x_1, \qquad w_{11}^{(1)} \leftarrow w_{11}^{(1)} + \Delta w_{11}^{(1)},$$

onde x_1 é o primeiro sinal de entrada da rede neural.

Algoritmo back-propagation

Algoritmo:

1. Inicializar os pesos (geralmente de forma aleatória com $w_{ji}^{(k)} \in [-1, 1]$);
2. Apresentar os dados de entrada do conjunto de treinamento e obter a saída da rede. Calcular os erros de saída e os δs dos neurônios de saída:
$$e = d - y, \qquad \delta = \varphi'(v)e;$$
3. Propagar para trás (*backward*) os δs e calcular os $\delta^{(k)}$ da camada imediatamente à esquerda:
$$e^{(k)} = W^T \delta, \qquad \delta^{(k)} = \varphi'\left(v^{(k)}\right) e^{(k)};$$
4. Repetir o passo 3 até alcançar a primeira camada neural escondida (que fica imediatamente após a entrada da rede).

Algoritmo back-propagation

Algoritmo (continuação):

5. Ajustar o pesos segundo a seguinte regra de treinamento:

$$\Delta w_{ji} = \alpha \delta_i x_{ji},$$
$$w_{ji} \leftarrow w_{ji} + \Delta w_{ji}$$

6. Repetir os passos 2-5 para cada amostra do conjunto de treinamento (completar 1 época);
7. Repetir os passos 2-6 até que seja atingida alguma das condições de parada (número máximo de épocas ou norma mínima desejada para o erro na saída).

Variações do back-propagation: termo de momentum

Inserção do termo de momentum (m): aumenta a velocidade do treinamento ao usar a regra delta.

O passo 5 do algoritmo é modificado da seguinte maneira:

$$\Delta w = \alpha \delta x,$$
$$m = \Delta w + \beta m^{-},$$
$$w \leftarrow w + m,$$
$$m^{-} \leftarrow m,$$

onde m^{-} é o termo de momentum da iteração anterior à atual e $0 < \beta < 1$.

Variações do back-propagation: termo de momentum

Vejamos como o momentum evolui ao longo das iterações:

$$
\begin{aligned}
m(0) &= 0, \\
m(1) &= \Delta w(1) + \beta m(0) = \Delta w(1), \\
m(2) &= \Delta w(2) + \beta m(1) = \Delta w(2) + \beta \Delta w(1), \\
m(3) &= \Delta w(3) + \beta m(2) = \Delta w(3) + \beta \Delta w(2) + \beta^2 \Delta w(1), \\
&\vdots \\
m(t) &= \sum_{i=1}^{t} \beta^{t-i} \Delta w(i).
\end{aligned}
$$

Note que inicialmente $m(t)$ tem grande contribuição no ajuste do peso (ajuste maior que apenas Δw). Ao longo das iterações na época, a contribuição de βm^- diminui. Logo, $m(t)$ faz o treinamento convergir mais rápido e mantém a estabilidade.

Variações do back-propagation: entropia cruzada

- Percebam que o back-propagation trabalha no sentido de diminuir o erro da saída $\Rightarrow$ a soma dos erros quadráticos da rede é a função de custo usada na derivação do algoritmo.

$$J = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2}(d_j - y_j)^2.$$

- Podemos adotar outra função de custo: entropia cruzada (*cross-entropy*):

$$J = \sum_{j=1}^{M} \left[-d_j ln(y_j) - (1 - d_j) ln(1 - y_j)\right].$$

Variações do back-propagation: entropia cruzada

- A função de entropia cruzada apresenta os termos $ln(y_j)$ e $ln(1 - y_j)$. Logo,
  - é necessário que $0 < y_j < 1$;
  - geralmente são usadas funções sigmóide ou *softmax* para ativação:

$$softmax(x_j) = \frac{e^{x_j}}{\sum_{k=1}^{M} x_k}, \qquad x \in \mathbb{R}^k.$$

- O uso de logaritmos faz com que a entropia cruzada seja mais sensível aos erros de saída do que a soma dos erros quadráticos.
  - Entropia cruzada apresenta melhor performance;
  - Sempre que permitido pelas características da aplicação, deve-se escolher regras de aprendizagem baseadas em entropia cruzada.

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Algoritmo back-propagation com função de custo de entropia cruzada:

1. Inicializar os pesos (geralmente de forma aleatória com $w_{ji}^{(k)} \in [-1, 1]$);
2. Apresentar os dados de entrada do conjunto de treinamento e obter a saída da rede. Calcular os erros de saída e os δs dos neurônios de saída:

$$e = d - y, \qquad \delta = e;$$

3. Propagar para trás (*backward*) os δs e calcular os $\delta^{(k)}$ da camada imediatamente à esquerda:

$$e^{(k)} = W^T \delta, \qquad \delta^{(k)} = \varphi' \left(v^{(k)} \right) e^{(k)};$$

4. Repetir o passo 3 até alcançar a primeira camada neural escondida (que fica imediatamente após a entrada da rede).

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Algoritmo back-propagation com função de custo de entropia cruzada (continuação):

5. Ajustar o pesos segundo a seguinte regra de treinamento:

$$\Delta w_{ji} = \alpha \delta_i x_{ji},$$
$$w_{ji} \leftarrow w_{ji} + \Delta w_{ji}$$

6. Repetir os passos 2-5 para cada amostra do conjunto de treinamento (completar 1 época);
7. Repetir os passos 2-6 até que seja atingida alguma das condições de parada (número máximo de épocas ou norma mínima desejada para o erro na saída).

Perceba que a única diferença entre esse algoritmo e o do back-propagation com soma de erros quadráticos está no cálculo de δ no passo 2.

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Derivação do algoritmo back-propagation:

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n), \text{neurônio j é um nó de saída} \tag{28}$$

$$E(n) = \frac{1}{2}\sum_{j \in C} e_j^2(n) \tag{29}$$

sendo neurônio j e interação n. Erro quadrático médio

$$E_{eqm}(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E(n) \tag{30}$$

Nível de atividade interna produzida na entrada da não linearidade associada com o neurônio j é

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^{p} w_{ji}(n) y_i(n) \tag{31}$$

sendo p o número total de entradas aplicado ao neurônio j, excluindo o threshold. Função sinal que aparece na saída do neurônio j na interação n

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Derivação do algoritmo back-propagation:

Função sinal que aparece na saída do neurônio j na interação n

$$y_j(n) = \phi_j(n) v_j(n) \tag{32}$$

Correção do peso w_{ji}:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_j(n)}$$

Considerando as respectivas derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial E(n)}{\partial e_i(n)} = e_j(n)$$

$$\frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} = -1$$

$$\frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = \dot{\phi}_j(v_j(n))$$

$$\frac{\partial v(n)}{\partial w_{ji}(n)} = y_i(n)$$

Resultado:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n)\dot{\phi}_j(v_j(n))y_i(n)$$

Regra delta:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_i(n)$$

sendo o gradiente $\delta_j(n)$ definido por

$$\delta_j(n) = -\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)}$$

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Entropia cruzada:

Função sinal que aparece na saída do neurônio j na interação n

$$y_j(n) = \phi_j(n) v_j(n) \tag{33}$$

Correção do peso w_{ji}:

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -\frac{\partial J(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

$$J = \sum_{j=1}^{M} \left[-d_j ln(y_j) - (1 - d_j) ln(1 - y_j) \right].$$

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Entropia cruzada:

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -\left(\frac{d}{y_j(n)} - \frac{1-d}{1-y_j(n)}\right)\frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)}\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

$$J = \sum_{j=1}^{M}\left[-d_j ln(y_j) - (1-d_j)ln(1-y_j)\right].$$

Variações do back-propagation: entropia cruzada

Entropia cruzada:

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -\left(\frac{d - y_j(n)}{y_j(n)(1 - y_j(n))}\right)\frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)}\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -\left(\frac{d - y_j(n)}{y_j(n)(1 - y_j(n))}\right) y_j(n)(1 - y_j(n))\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -(d - y_j(n))\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)}$$

Resultado:

$$\frac{\partial J(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -ey_j(n)$$

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 1: BackpropXOR.m.

```
function [W1, W2] = BackpropXOR(W1, W2, X, D)

% This function performs backpropagation SGD training of a neural network with one hidden layer.
% W1: weight matrix between the input layer and hidden layer.
% W2: weight matrix between the hidden layer and output layer.
% X: inputs for supervised training.
% D: desired outputs.

alpha = 0.9;
N = length(X);
for k = 1:N
        x = X(k, :)';
        d = D(k);
        v1 = W1*x;
        y1 = Sigmoid(v1);
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 1: BackpropXOR.m (continuação).

```
            v = W2*y1;
            y = Sigmoid(v);
            e = d - y;
            delta = y.*(1-y).*e;
            e1 = W2'*delta;
            delta1 = y1.*(1-y1).*e1;
            dW1 = alpha*delta1*x';
            W1 = W1 + dW1;
            dW2 = alpha*delta*y1';
            W2 = W2 + dW2;
end %for
end %function
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 2: TestBackpropXOR.m.

```
% This program calls in the BackpropXOR.m function and trains the
neural network max_epoch times.

clear all
clc

%Inputs:
X = [0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1];

%Desired outputs:
D = [0; 1; 1; 0];

%Initialization of weights:
W1 = 2*rand(4, 3) - 1;
W2 = 2*rand(1, 4) - 1;

% Training process (adjusting weights):
max_epoch = 10000;
for epoch = 1:max_epoch       %train
                [W1, W2] = BackpropXOR(W1, W2, X, D);
end
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 2: TestBackpropXOR.m (continuação).

```
%Inference:
N = size(X,1);
y = zeros(N,1);
for k = 1:N
                x = X(k, :)';
                v1 = W1*x;
                y1 = Sigmoid(v1);
                v = W2*y1;
                y(k) = Sigmoid(v); %obtained output.
end

disp('Results:');
disp(' [desired      neuron_output]');
disp([D y]);
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 3: BackpropCE.m.

```
function [W1, W2] = BackpropCE(W1, W2, X, D)

%Backpropagation with Cross Entropy cost function.

alpha = 0.9;

N = size(X,1);
for k = 1:N
        x = X(k, :)'; %input x is a column vector
        d = D(k); %desired output
        v1 = W1*x;
        y1 = Sigmoid(v1);
        v = W2*y1;
        y = Sigmoid(v); %out. neuron in output layer.
        e = d - y;
        delta = e;
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 3: BackpropCE.m (continuação).

```
                e1 = W2'*delta;
                delta1 = y1.*(1-y1).*e1;
                dW1 = alpha*delta1*x';
                W1 = W1 + dW1;
                dW2 = alpha*delta*y1';
                W2 = W2 + dW2;
end %for
end %function
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 4: TestBackpropCE.m.

```
% This program calls the BackpropCE.m function and trains the neural
network max_epoch times.

clear all
clc

%Inputs:
X = [0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1];

%Desired outputs:
D = [0; 1; 1; 0];

%Initialization of weights:
W1 = 2*rand(4, 3) - 1;
W2 = 2*rand(1, 4) - 1;

% Training process (adjusting weights):
max_epoch = 10000;
for epoch = 1:max_epoch       %train
                [W1, W2] = BackpropCE(W1, W2, X, D);
end
```

Algoritmo back-propagation: implementação em Matlab

Código 4: TestBackpropCE.m (continuação).

```
%Inference:
N = size(X,1);
y = zeros(N,1);
for k = 1:N
                x = X(k, :)';
                v1 = W1*x;
                y1 = Sigmoid(v1);
                v = W2*y1;
                y(k) = Sigmoid(v); %obtained output.
end

disp('Results:');
disp(' [desired       neuron_output]');
disp([D y]);
```

Algoritmo back-propagation: exemplo 1

Executando o código 2 (TestBackpropXOR.m) para realizar a operação XOR. RN com 3 entradas, 1 camada escondida com 4 neurônios e 1 neurônio na camada de saída.

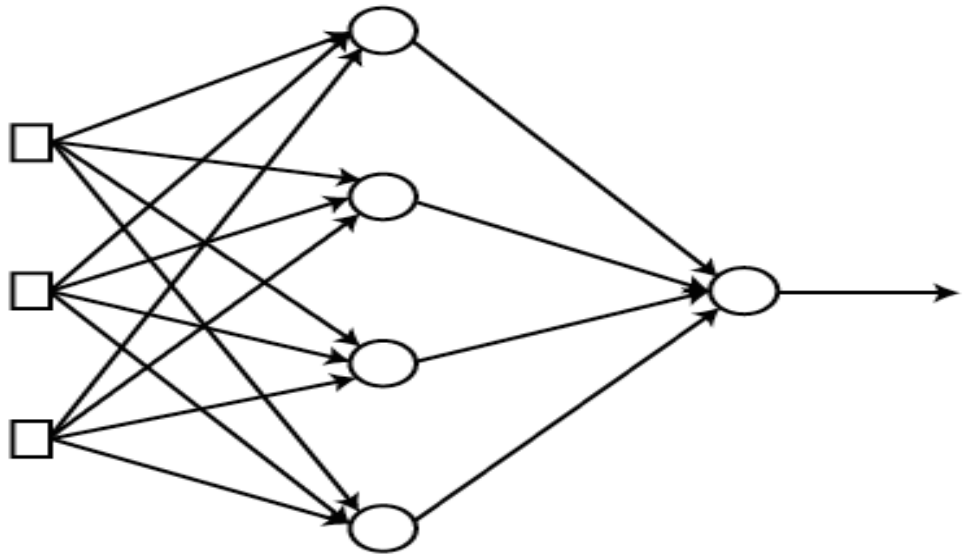


Figure 32: Rede Neural com uma camada escondida.

saída real	d_i
0.0106	0
0.9900	1
0.9902	1
0.0110	0

$$W1 = \begin{bmatrix} -3.4272 & -3.6019 & 5.3359 \\ 3.1907 & 2.6050 & -0.0809 \\ -6.8773 & -6.6293 & 2.9185 \\ 3.3357 & 3.1405 & -4.9207 \end{bmatrix}, \qquad W2 = \begin{bmatrix} 6.1638 \\ 0.7844 \\ -11.5907 \\ -7.5517 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

Algoritmo back-propagation: exemplo 2

Executando o código 4 (TestBackpropCE.m) para realizar a operação XOR. RN com 3 entradas, 1 camada escondida com 4 neurônios e 1 neurônio na camada de saída.

saída real	d_i
0.0000	0
0.9999	1
0.9998	1
0.0004	0

$$W1 = \begin{bmatrix} 4.7913 & -3.0530 & 1.7926 \\ -8.8875 & 4.2089 & -1.1488 \\ -6.6164 & -7.4783 & 1.9195 \\ 6.5946 & -9.8156 & -2.2504 \end{bmatrix}, \qquad W2 = \begin{bmatrix} -8.2394 \\ 11.7559 \\ -9.1725 \\ 16.8448 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

Algoritmo back-propagation: exemplo 3

Convergência da treinamento com diferentes funções de custo: soma dos erros quadráticos (*sum of squared errors*) e entropia cruzada (*cross entropy*).[1] RN com 3 entradas, 1 camada escondida com 4 neurônios e 1 neurônio na camada de saída.

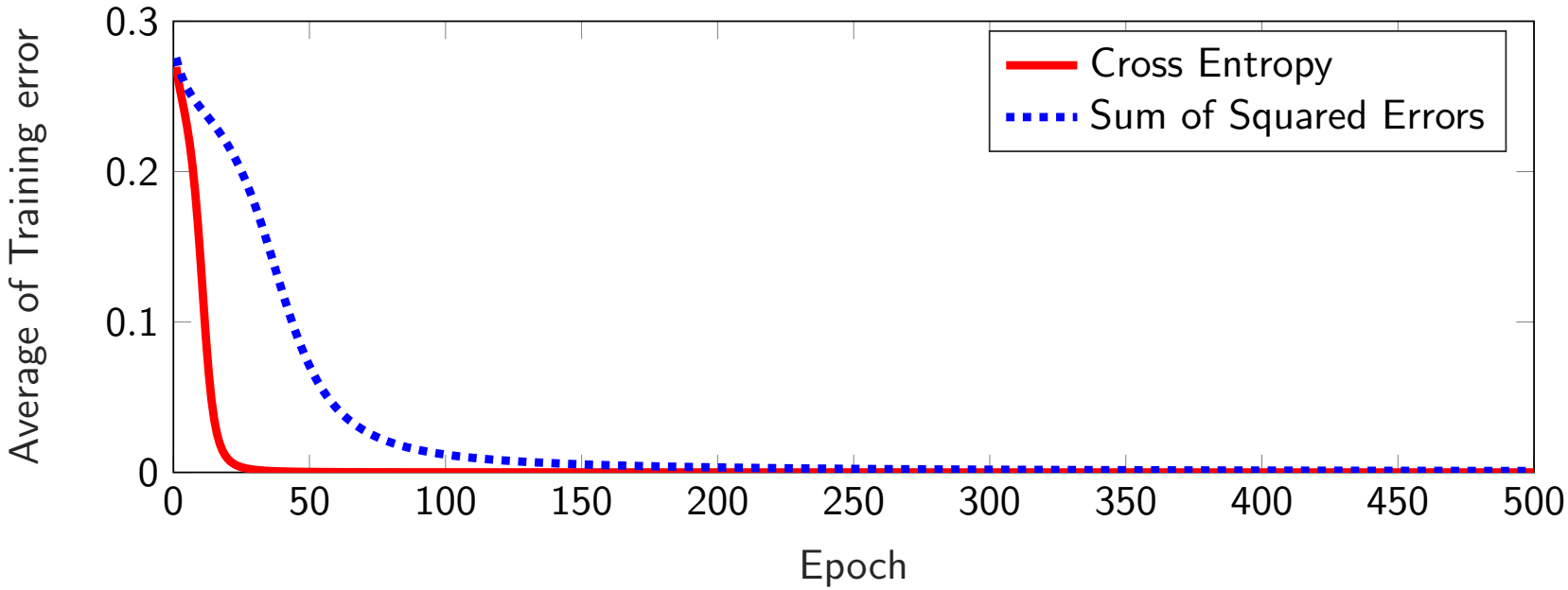


Figure 33: Convergência do treinamento com soma dos erros quadráticos e entropia cruzada.

Classificação usando redes neurais

Características do problema

Classificação de padrões:

- Dado um conjunto de entradas, separar as amostras em uma ou mais classes;
- O número de neurônios de saída depende do número de classes previamente definidas;
- As saídas serão sempre grandezas discretas (caso mais simples: saída binária);
- Exemplos: classificação de imagens, caligrafia, reconhecimento de voz, agropecuária, etc.[2]

Classificação com o perceptron simples

A classificação com perceptron simples (único neurônio) é adequada quando:

- Há apenas duas classes (classificação binária) linearmente separáveis;
- Exemplos: filtro de emails spam (*normal/spam*), aprovação de empréstimos (*aprova/não aprova*), ponto de colheita de frutos (*verde/maduro*), etc;
- As classes são associadas aos valores extremos da função de ativação (funções sigmóide ou sinal $\implies \{0, 1\}$ ou $\{-1, 1\}$).

Classificação com o perceptron simples

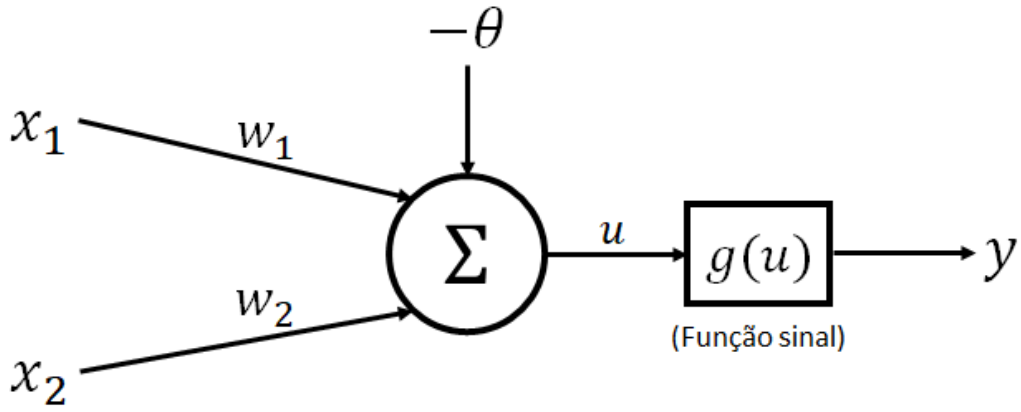


Figure 34: Perceptron simples.

$$u = x_1 w_1 + x_2 w_2 - \theta,$$

$$y = \begin{cases} 1, \text{ se } x_1 w_1 + x_2 w_2 - \theta \geq 0, \\ -1, \text{ se } x_1 w_1 + x_2 w_2 - \theta < 0. \end{cases}$$

Fronteira de decisão:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 - \theta = 0 \implies \text{reta.}$$

Classificação com o perceptron simples

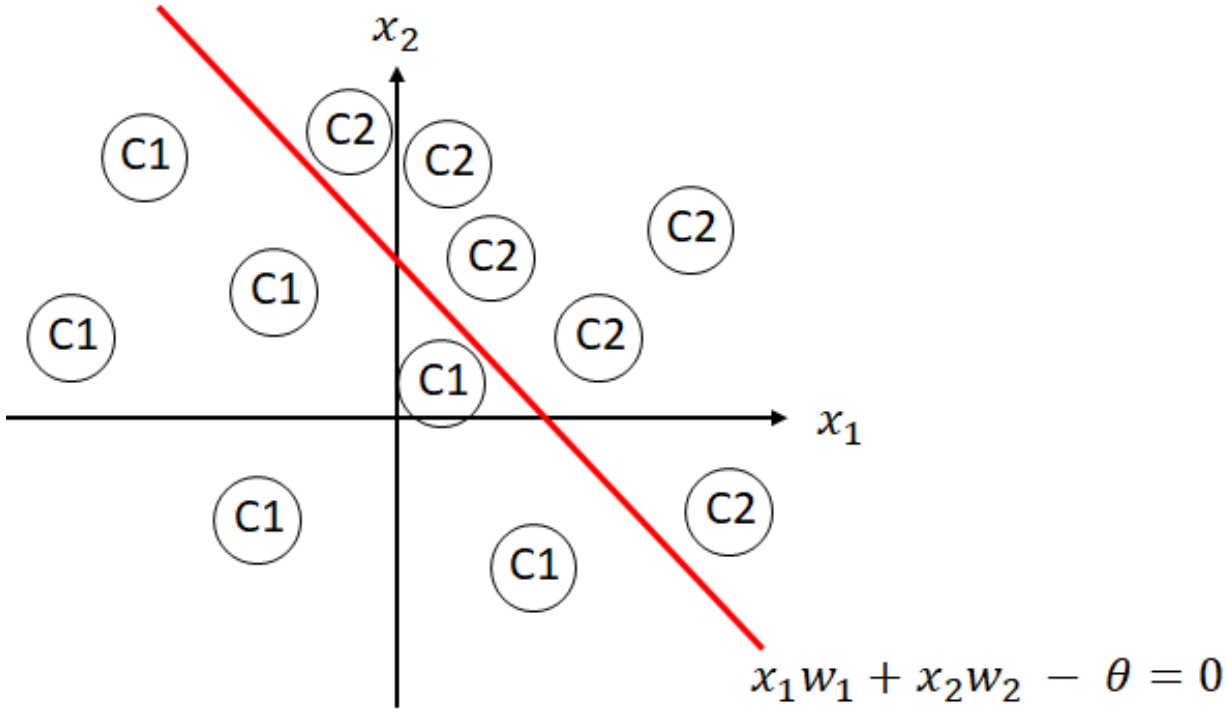


Figure 35: Fronteira de decisão para duas classes linearmente separáveis.

Obs.: a reta de separabilidade produzida após o treinamento não é única.

Classificação com o perceptron simples: limitações

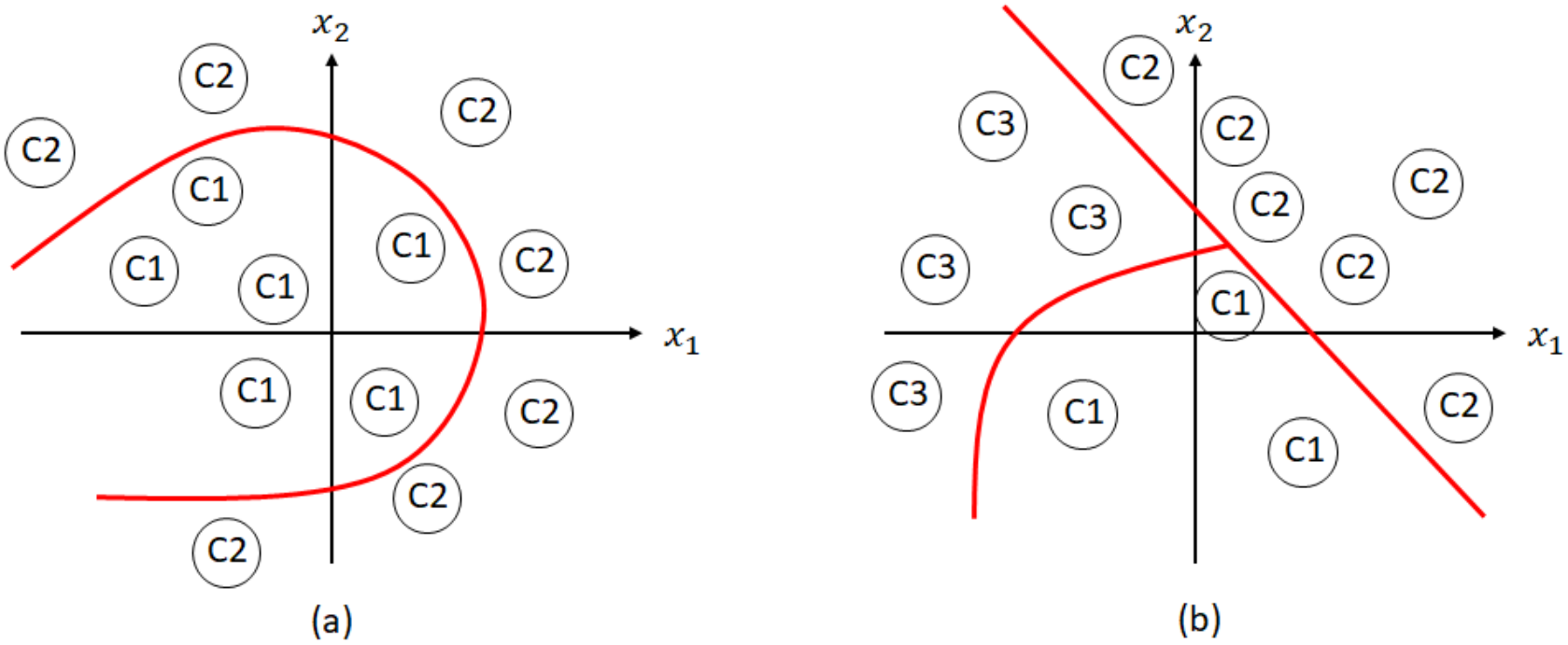
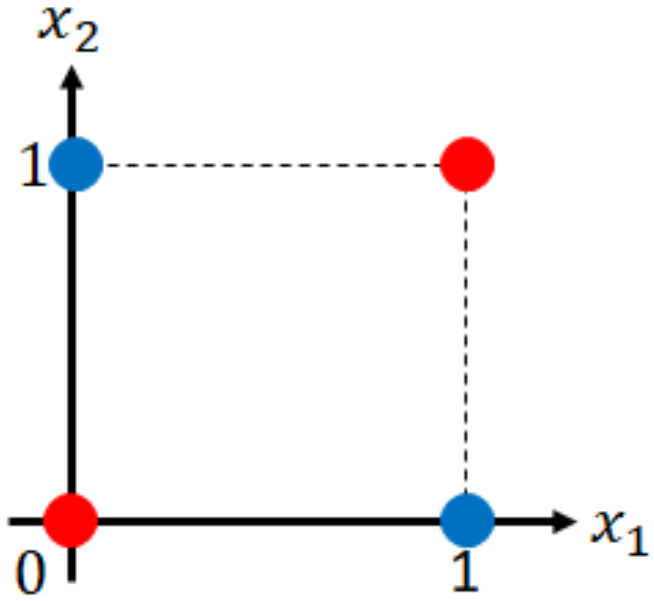


Figure 36: (a) Classes não linearmente separáveis. (b) Mais de duas classes.

Solução: **perceptron multicamadas**.

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: problema X-OR.



x_1	x_2	X-OR
0	0	0 (vermelho)
0	1	1 (azul)
1	0	1 (azul)
1	1	0 (vermelho)

Impossível separar as classes usando apenas uma reta!

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: problema X-OR.

Perceptron com uma camada escondida e função de ativação *softmax* no neurônio de saída.

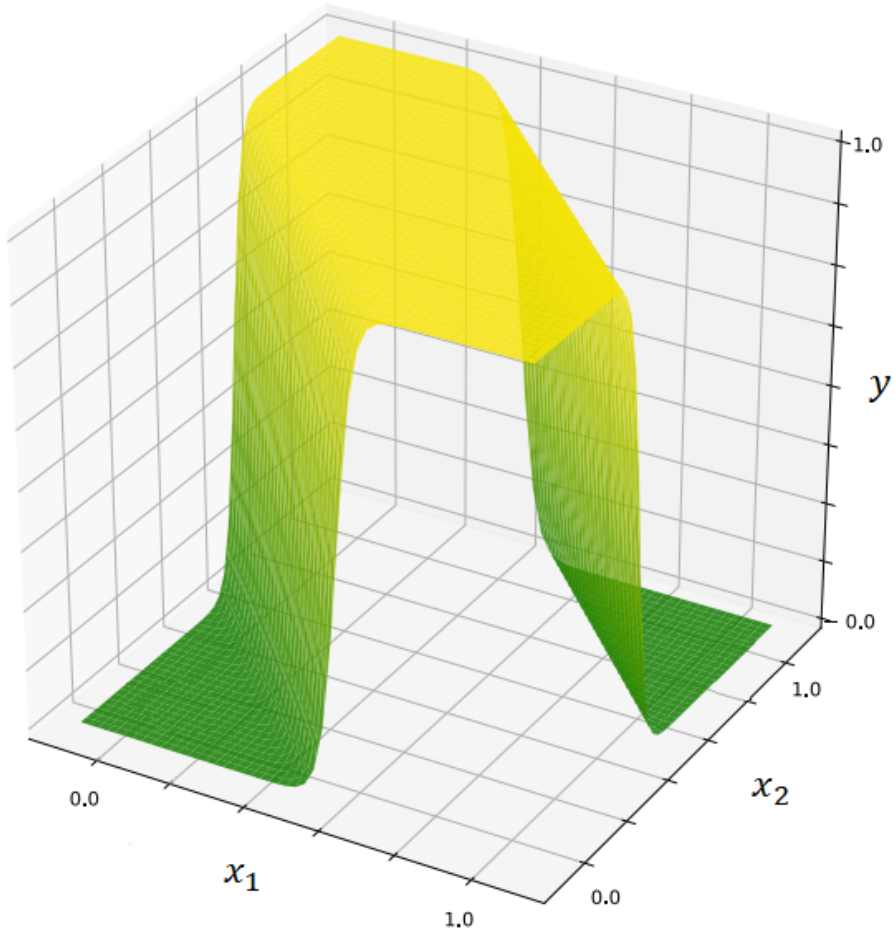


Figure 37: Resposta do neurônio de saída para o problema X-OR. Fonte: [2]

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

- Receber uma imagem de dimensão 5 pixels por 5 pixels representando números de 1 a 5 e classificá-los corretamente;
- A codificação da saída será feita pelo método *one-of-N* (ou *one-hot*);

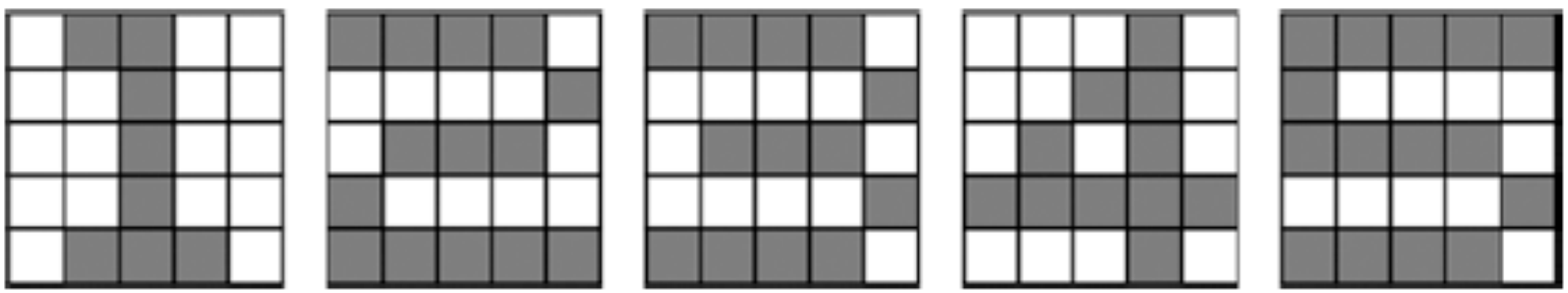


Figure 38: Fonte: [1].

$$\underbrace{[1\ 0\ 0\ 0\ 0]}_{1},\quad \underbrace{[0\ 1\ 0\ 0\ 0]}_{2},\quad \underbrace{[0\ 0\ 1\ 0\ 0]}_{3},\quad \underbrace{[0\ 0\ 0\ 1\ 0]}_{4},\quad \underbrace{[0\ 0\ 0\ 0\ 1]}_{5}.$$

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

- Receber uma imagem de dimensão 5 pixels por 5 pixels representando números de 1 a 5 e classificá-los corretamente;
- A codificação da saída será feita pelo método *one-of-N* (ou *one-hot*);
- Rede com uma camada escondida de 50 neurônios com função de ativação sigmoidal;
- Função de ativação *softmax* nos neurônios da camada de saída $\Longrightarrow$ correta interpretação probabilística dos valores;
- O treinamento segue os mesmos passos mostrados nas aulas passadas.

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

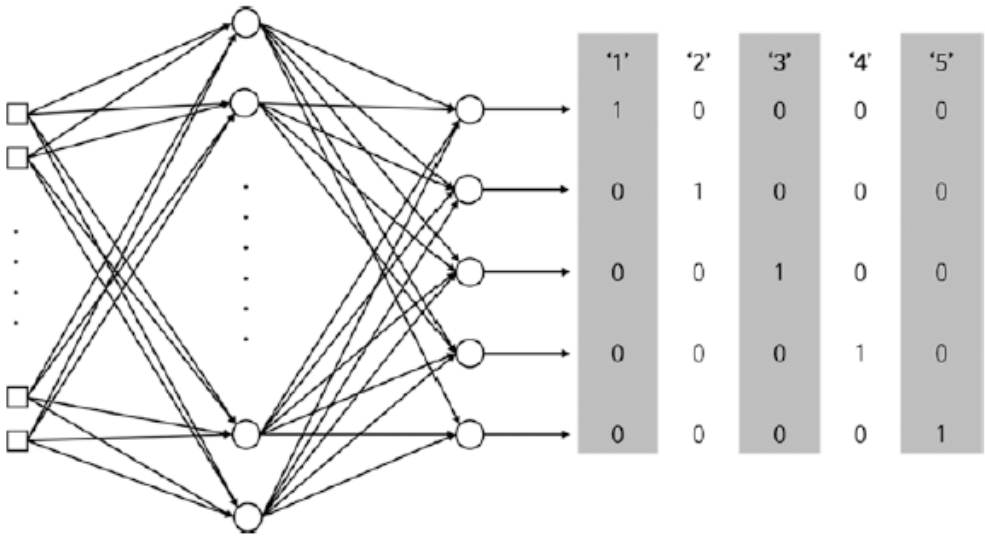


Figure 39: Modelo da rede neural. Fonte: [2]

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

Por que usar a função *softmax* e não a sigmoidal nos neurônios da camada de saída?[3]

$$softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{M} e^{x_j}} \in [0,1], \; sigmoid(x_i) = \frac{1}{1+e^{-x_i}} \in [0,1], \; x_i \in \mathbf{x}.$$

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

Por que usar a função *softmax* e não a sigmoidal nos neurônios da camada de saída?[3]

$$softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{M} e^{x_j}} \in [0,1], \; sigmoid(x_i) = \frac{1}{1+e^{-x_i}} \in [0,1], \; x_i \in \mathbf{x}.$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \underset{\text{softmax}}{\Longrightarrow} \varphi(v) = \begin{bmatrix} 0.6590 \\ 0.2424 \\ 0.0986 \end{bmatrix} \text{(probabilidade; soma é sempre 1)},$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{sigmóide}}{\Longrightarrow} \varphi(v) = \begin{bmatrix} 0.7311 \\ 0.7311 \\ 0.7311 \end{bmatrix} \text{(não é probabilidade)}.$$

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

Por que usar a função *softmax* e não a normalização nos neurônios da camada de saída?[4]

$$softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{M} e^{x_j}}, \qquad std\_norm(x_i) = \frac{x_i}{max(\mathbf{x})}, \; x_i \in \mathbf{x}.$$

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos.

Por que usar a função *softmax* e não a normalização nos neurônios da camada de saída?[4]

$$softmax(x_i) = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{M} e^{x_j}}, \qquad std\_norm(x_i) = \frac{x_i}{max(\mathbf{x})}, \; x_i \in \mathbf{x}.$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \underset{\text{softmax}}{\Longrightarrow} \varphi(v_1) = \begin{bmatrix} 0.6590 \\ 0.2424 \\ 0.0986 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{softmax}}{\Longrightarrow} \varphi(v_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \underset{\text{norm.}}{\Longrightarrow} \varphi(v_1) = \begin{bmatrix} 0.6559 \\ 0.5800 \\ 0.5081 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{norm.}}{\Longrightarrow} \varphi(v_2) = \begin{bmatrix} 0.6559 \\ 0.5800 \\ 0.5081 \end{bmatrix}$$

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *MultiClass.m*:

```
function [W1, W2] = Multiclass(W1, W2, X, D)

alpha = 0.9;
N = size(X,3); %number of samples

for k = 1:N
        x = reshape(X(:, :, k), 25, 1); %reorganizes the k-th sam-
        ple
                                        %into a 25x1 vector
        d = D(k, :)'; %desired output
        v1 = W1*x;
        y1 = Sigmoid(v1);
        v = W2*y1;
        y = Softmax(v);
        e = d - y;
        delta = e;
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *MultiClass.m* (continuação):

```
        e1 = W2'*delta;
        delta1 = y1.*(1-y1).*e1;
        dW1 = alpha*delta1*x';
        W1 = W1 + dW1;
        dW2 = alpha*delta*y1';
        W2 = W2 + dW2;
        end %for
end %function
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *TestMultiClass.m*:

```
clear all
close all
clc

rng(3);

% The input set consists of five 5x5 pixel squares.
%0: white pixel; 1: black pixel. X = zeros(5, 5, 5);
X(:, :, 1) = [0 1 1 0 0;
              0 0 1 0 0;
              0 0 1 0 0;
              0 0 1 0 0;
              0 1 1 1 0]; %1

X(:, :, 2) = [1 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              0 1 1 1 0;
              1 0 0 0 0;
              1 1 1 1 1]; %2
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *TestMultiClass.m* (continuação):

```
X(:, :, 3) = [1 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              0 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              1 1 1 1 0]; %3

X(:, :, 4) = [0 0 0 1 0;
              0 0 1 1 0;
              0 1 0 1 0;
              1 1 1 1 1;
              0 0 0 1 0]; %4

X(:, :, 5) = [1 1 1 1 1;
              1 0 0 0 0;
              1 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              1 1 1 1 0]; %5
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *TestMultiClass.m* (continuação):

```
% Desired outputs mapped via one-hot encoding (or 1-of-N encoding):
D = [1 0 0 0 0; %1
     0 1 0 0 0; %2
     0 0 1 0 0; %3
     0 0 0 1 0; %4
     0 0 0 0 1]; %5

% Weights initialization:
W1 = 2*rand(50, 25) - 1; %(hidden neurons) x (inputs)
W2 = 2*rand( 5, 50) - 1; %(outputs) x (hidden neurons)

% Training process:
max_epoch = 10000;
for epoch = 1:max_epoch
                [W1, W2] = MultiClass(W1, W2, X, D);
end
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *TestMultiClass.m* (continuação):

```
% Inference:
N = size(X,3);
y = zeros(N,size(D,2));
for k = 1:N
                x = reshape(X(:, :, k), 25, 1);
                v1 = W1*x;
                y1 = Sigmoid(v1);
                v = W2*y1;
                y(k,:) = Softmax(v);
end

disp('Results:'); disp(' [desired]:'); disp(D);
disp(' [network_output]:'); disp(y)

%% Showing images
for i = 1:N
                compareImages(X(:,:,i), y(i,:));
end
```

Classificação com perceptron multicamadas

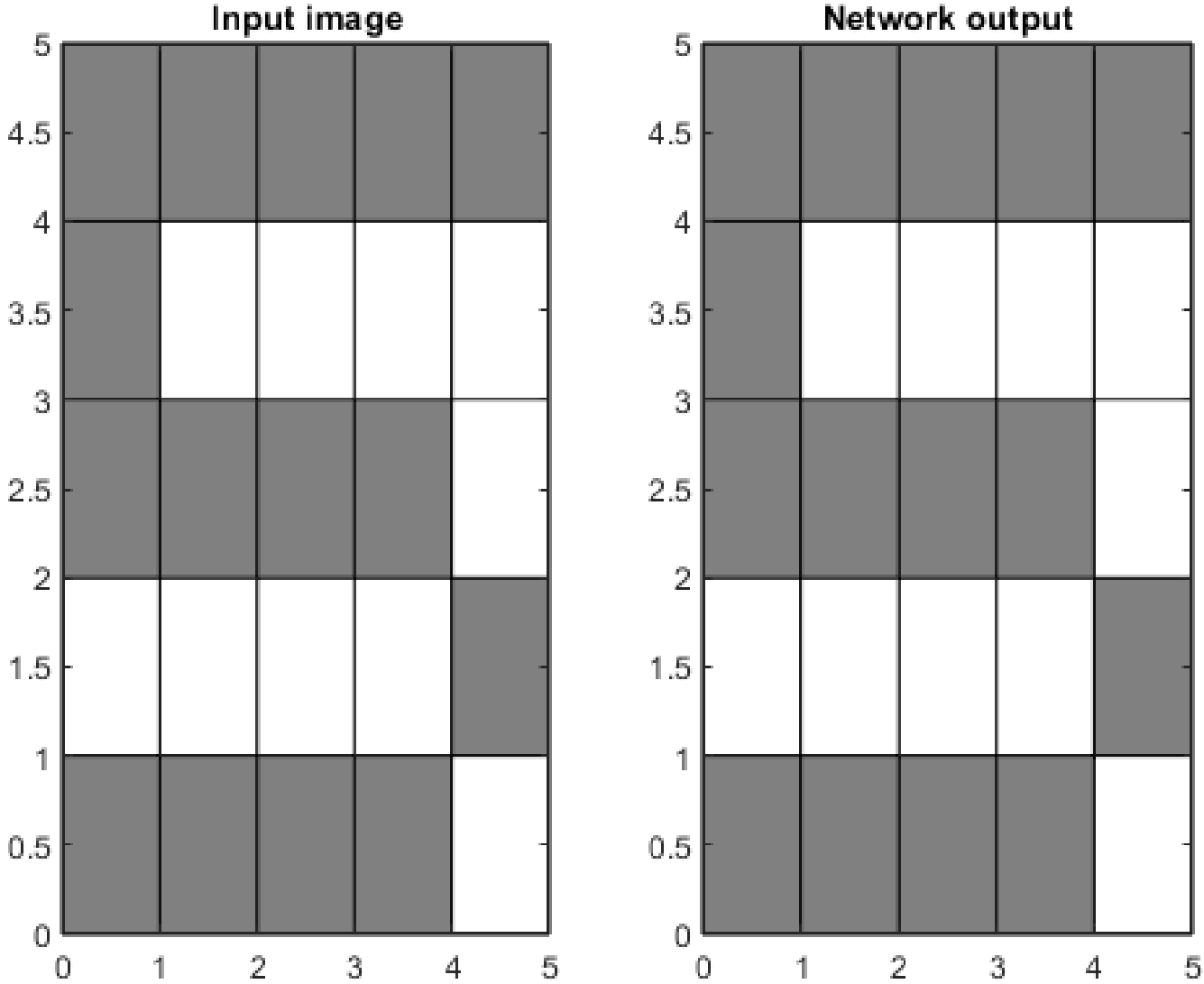


Figure 40: Imagens de entrada e saída.

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *RealMultiClass.m*: testa a rede treinada quando são inseridas imagens corrompidas.

```
clear all; close all; clc

TestMultiClass; %get trained weights W1 and W2.

X = zeros(5, 5, 5);
X(:, :, 1) = [0 0 1 1 0;
              0 0 1 1 0;
              0 1 0 1 0;
              0 0 0 1 0;
              0 1 1 1 0];

X(:, :, 2) = [1 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              0 1 1 1 0;
              1 0 0 0 1;
              1 1 1 1 1];
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *RealMultiClass.m* (continuação):

```
X(:, :, 3) = [1 1 1 1 0;
              0 0 0 0 1;
              0 1 1 1 0;
              1 0 0 0 1;
              1 1 1 1 0];

X(:, :, 4) = [0 1 1 1 0;
              0 1 0 0 0;
              0 1 1 1 0;
              0 0 0 1 0;
              0 1 1 1 0];

X(:, :, 5) = [0 1 1 1 1;
              0 1 0 0 0;
              0 1 1 1 0;
              0 0 0 1 0;
              1 1 1 1 0];
```

Classificação com perceptron multicamadas

Exemplo: identificação de dígitos. Código *RealMultiClass.m* (continuação):

```
% Inference:
N = size(X,3);
y = zeros(N,5); %5 because of the one-hot encoding method.

for k = 1:N
                x = reshape(X(:, :, k), 25, 1);
                v1 = W1*x;
                y1 = Sigmoid(v1);
                v = W2*y1;
                y(k,:) = Softmax(v);
end

disp('Results:');
disp(' [network_output]:');
disp(y)
%% Showing images:
for i = 1:N
                compareImages(X(:,:,i), y(i,:));
end
```

Classificação com perceptron multicamadas

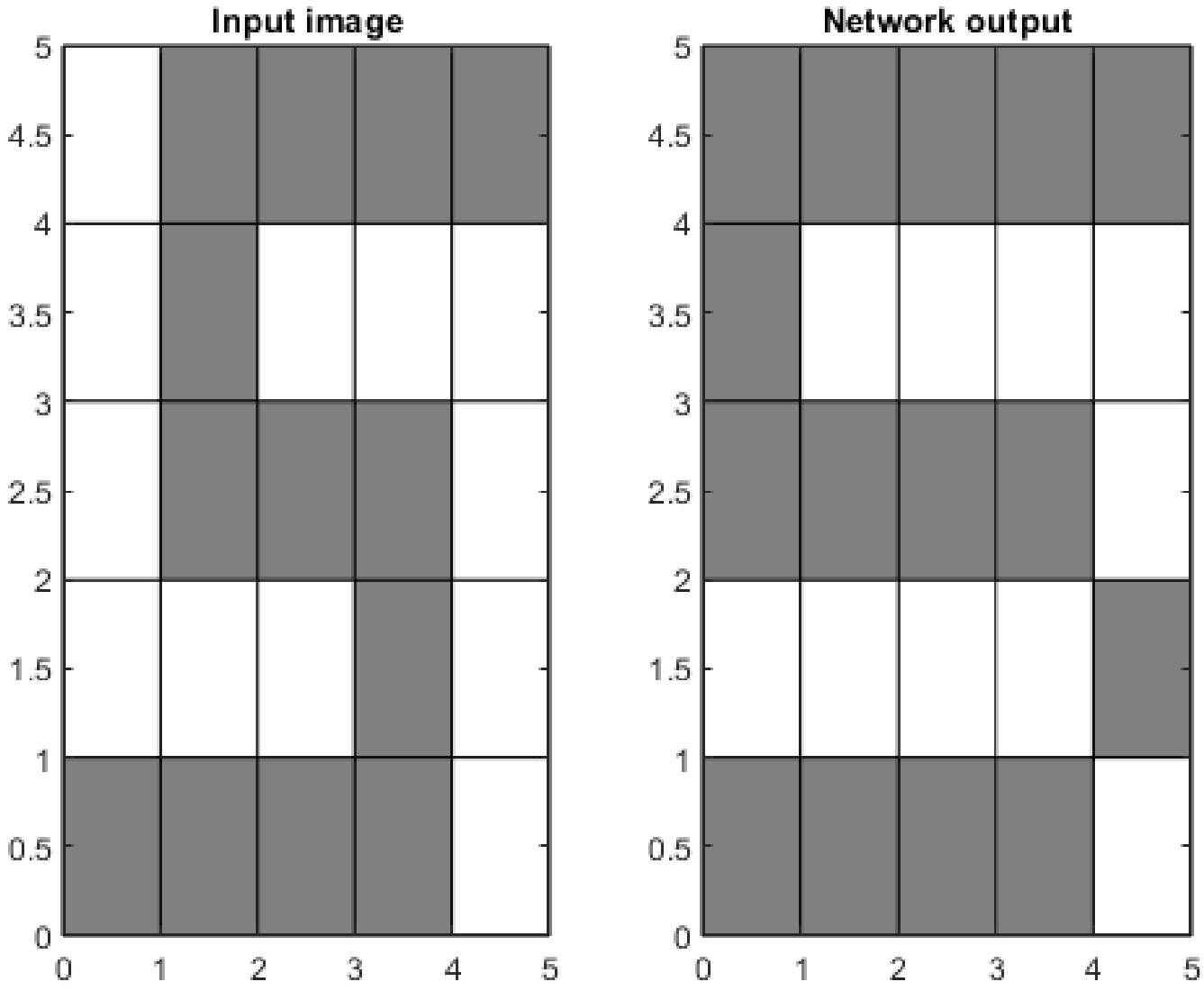


Figure 41: Imagens de entrada e saída.

Classificação usando redes neurais: exercícios

Exercício 1: reconhecimento de dígitos

Dada uma imagem de dimensões 5×5 pixels, classificá-la como sendo um dígito de 1 a 7 usando uma rede perceptron com uma camada escondida de 50 neurônios. Adote codificação *one-hot* e neurônios sem limiar.

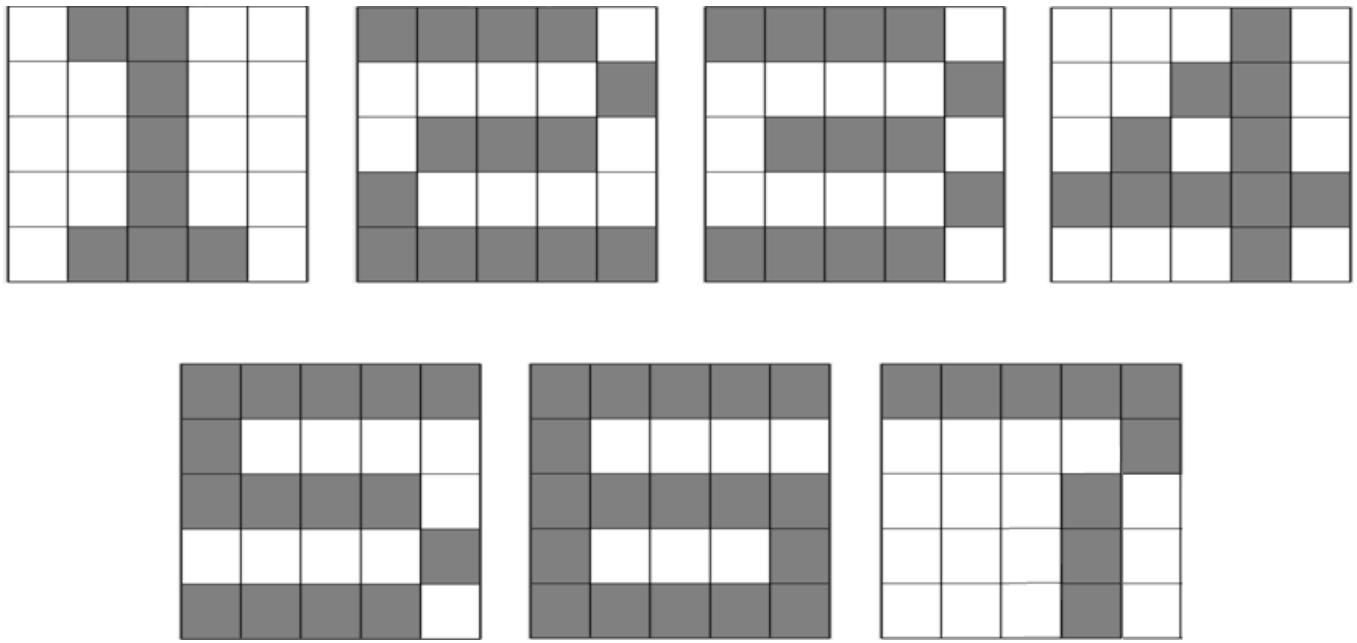


Figure 42: Classes (dígitos).

Exercício 1: reconhecimento de dígitos

Dada uma imagem de dimensões 5×5 pixels, classificá-la como sendo um dígito de 1 a 7 usando uma rede perceptron com uma camada escondida de 50 neurônios. Adote codificação *one-hot* e neurônios sem limiar.

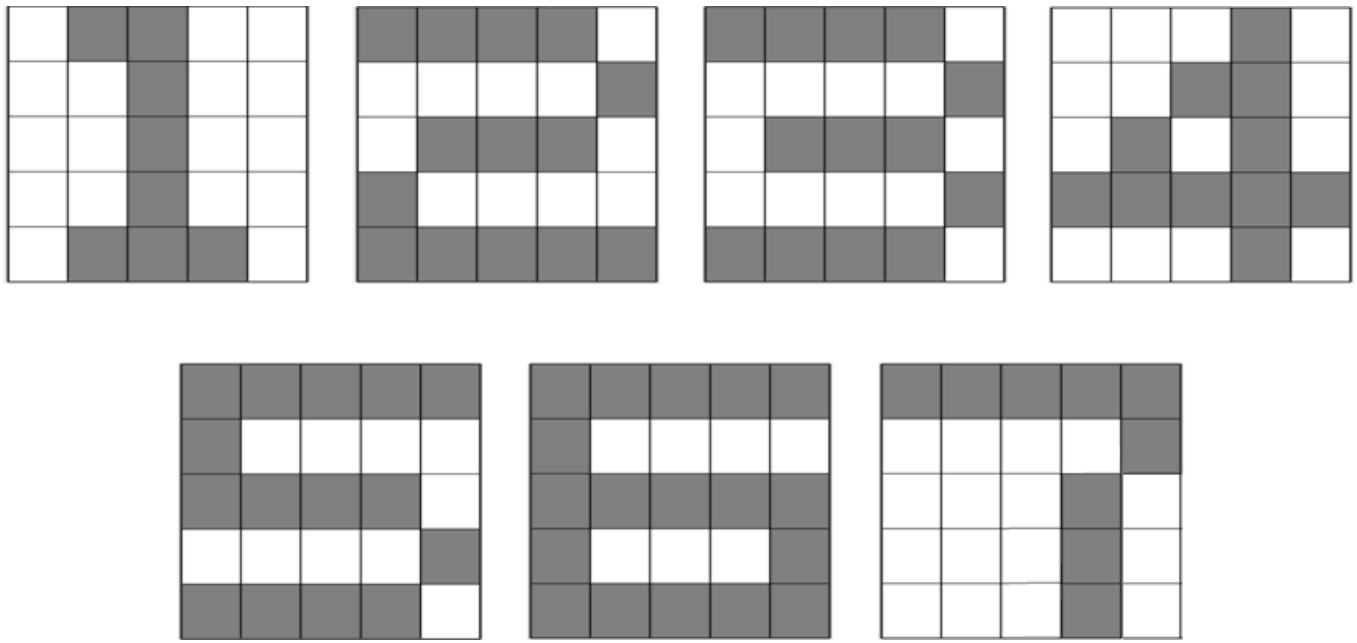


Figure 42: Classes (dígitos).

Quantos sinais de entrada? Quantos neurônios na saída?

Sugestão: utilize os códigos já disponibilizados (*MultiClass.m TestMultiClass.m*, *compareImages.m*).

Exercício 1: reconhecimento de dígitos

$w^k_{j,i} \implies$ conecta o j-ésimo neurônio da camada k ao i-ésimo neurônio/sinal da camada k-1.

1. Quantos pesos foram ajustados nesse problema?
2. $w^k_{j,i} = 0$?
3. $w^1_{j,i} = 0, \ \forall j$? (Note que $w^1_{j,i}$ conecta os neurônios da primeira camada escondida ao i-ésimo sinal de entrada.)
4. $w^k_{j,i} = 0, \ \forall i$?

Datasets: http://archive.ics.uci.edu/ml/index.php.

Exercício 2: preferência de tempo de férias

"Uma determinada empresa avaliou por oito anos o comportamento dos funcionários quanto aos dias de férias que cada um utilizou durante esse tempo. A empresa identificou quatro grupos distintos que gostaram, ou não ficaram satisfeitos, de tirar férias de 5, 10, 15 e 30 dias. O primeiro grupo de funcionários gostou de ficar em férias por 5 e 15 dias e não gostou de ficar em férias por 10 e 30 dias. O segundo grupo gostou dos períodos de 10 e 30 dias e não gostou dos de 5 e 15 dias. O terceiro grupo gostou dos 10, 15 e 30 dias e não gostou de 5 dias. Por último, o quarto grupo gostou do período de 5 dias e não gostou do resto. Pede-se, treine uma rede neural supervisionada com vinte neurônios na camada escondida e quatro camadas de saída para identificar em qual grupo um trabalhador se encontra se ele foi identificado em um desses conjuntos de opiniões. Defina você mesmo uma taxa de parada no treinamento da rede que achar apropriada."

Exercício 2: preferência de tempo de férias

	5	10	15	30	S1	S2	S3	S4
1	G	N	G	N	1	0	0	0
2	N	G	N	G	0	1	0	0
3	N	G	G	G	0	0	1	0
4	G	N	N	N	0	0	0	1

Tabela com os respectivos grupos da empresa, períodos regulares de férias, avaliação dos funcionários e identificação da saída da rede neural.

Exercício 2: preferência de tempo de férias

1. Quais as diferenças entre os critérios de parada adotados para o treinamento da rede perceptron?
2. Qual o efeito das amostras corrompidas sobre a saída da rede?
3. Qual a influência da taxa de aprendizagem α sobre a convergência do treinamento da rede?