Na aula passada, vimos que no interior de um meio, e até mesmo fora dele, é possível definir um campo vetorial, chamado de deslocamento elétrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

satisfazendo leis de Gauss diferencial e integral

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$

onde ρ_f e Q_f são, respectivamente, a densidade de carga e a carga total "livres" (extras). Dessa forma, é possível usar a lei de Gauss e explorar a simetria de diversos problemas a partir da densidade de carga livre para determinar $\vec{D}$ sem se precisar determinar as densidades de carga ligada induzidas no processo de polarização do meio.

Agora para determinar $\vec{E}$, uma vez obtido $\vec{D}$, precisamos de informação acerca da polarização $\vec{P}$.

Vamos nos concentrar aqui numa classe de materiais para os quais é possível obter informação direta acerca da polarização $\vec{P}$.

Primeiramente, passaremos a trabalhar com meios homogêneos, ou seja, meios cujas propriedades não variem de um ponto a outro do espaço.

Dentre os meios homogêneos, trabalharemos com os chamados meios lineares para os quais a polarização é diretamente proporcional ao campo elétrico

$$\vec{P} = \epsilon_0 \underbrace{\chi_e}_{\text{suceptibilidade elétrica}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{campo elétrico total } \left(= \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{q_f} + \vec{E}_{q_b}\right)}$$

A suceptibilade elétrica χ_e é claramente admensional e depende da estrutura molecular do meio, bem como de fatores externos como temperatura, por exemplo.

Dessa forma, em meios dielétricos homogêneos e lineares

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \underbrace{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\equiv \epsilon} \vec{E}$$

permissividade do meio

Ou seja

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \epsilon_r \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$$

permissividade relativa

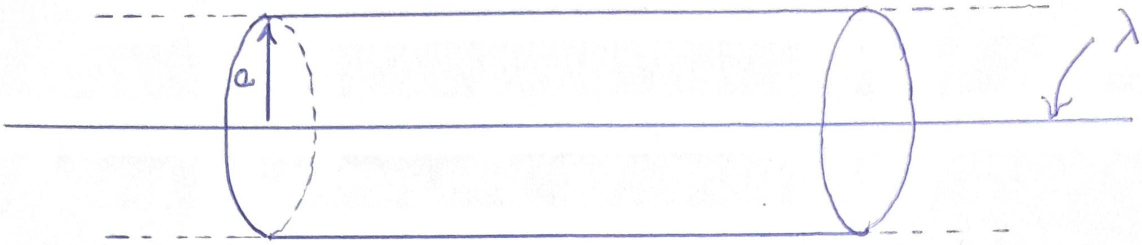
ou

constante dielétrica

Material	Dielectric Constant	Material	Dielectric Constant
Vacuum	1	Benzene	2.28
Helium	1.000065	Diamond	5.7
Neon	1.00013	Salt	5.9
Hydrogen	1.00025	Silicon	11.8
Argon	1.00052	Methanol	33.0
Air (dry)	1.00054	Water	80.1
Nitrogen	1.00055	Ice (-30° C)	99
Water vapor (100° C)	1.00587	$KTaNbO_3$ (0° C)	34,000

Table 4.2 Dielectric Constants (unless otherwise specified, values given are for 1 atm, 20° C). *Source: Handbook of Chemistry and Physics,* 78th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1997).

Voltemos ao problema do fio carregado envolto por uma camada cilíndrica de dielétrico da aula passada



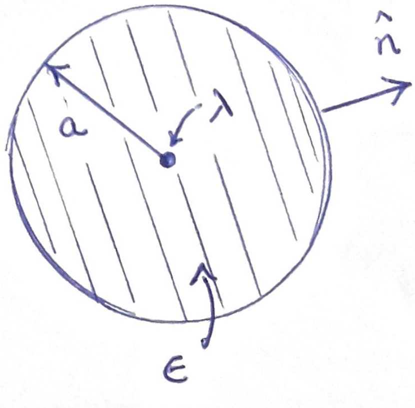
Através da lei de Gauss e da simetria cilíndrica do problema, chegamos a

$$\vec{D}(s) = \frac{\lambda}{2\pi s}\,\hat{s},$$

e, portanto, na região exterior ao dielétrico $(s > a)$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E}(s>a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\,\hat{s}$$

Vamos assumir agora que o dielétrico é homogêneo e linear com permissividade ϵ.



No meio dielétrico ($s \leq a$) vale então

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon s}\hat{s}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\epsilon_r},$$

onde $\vec{E}_{vac}$ é o campo que seria gerado na região $s < a$ na ausência do meio dielétrico.

Portanto

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon s}\hat{s} = \dfrac{\vec{E}_{vac}}{\epsilon_r}, & 0 < s \leq a \\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s} = \vec{E}_{vac}, & s > a \end{cases}$$

Agora podemos calcular a própria polarização $\vec{P}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \frac{\epsilon_0 \chi_e \lambda}{2\pi\epsilon s}\hat{s} = \vec{P}(s \leq a) \quad e \quad \vec{P}(s > a) = \vec{0}$$

A densidade de carga superficial ligada em $s = a$ é

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{s} = \frac{\epsilon_0 \chi_e \lambda}{2\pi\epsilon a}$$

Portanto, para um comprimento L de fio

$$Q_\sigma(a) = 2\pi a L\, \sigma_b = 2\pi a L \frac{\epsilon_0 \chi_e \lambda}{2\pi \epsilon a} = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} L \lambda$$

$$= \frac{\chi_e}{\epsilon_r} Q_f$$

Num cilindro de raio infinitesimal de raio $\delta > 0$ em torno do fio carregado

$$\sigma_b(s=\delta) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \underbrace{(-\hat{s})} = - \frac{\epsilon_0 \chi_e \lambda}{2\pi \epsilon \delta}$$

normal sempre aponta para fora do volume!

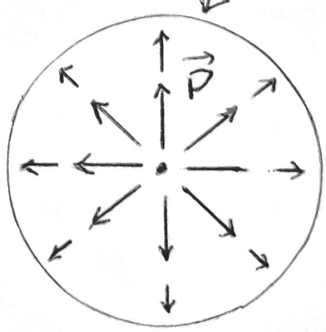
logo

$$Q_\sigma(\delta) = - \frac{\chi_e}{\epsilon_r} Q_f$$

Já no volume $0 < s < a$, não há carga ligada

$$\rho_b = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s P_s) = 0$$

$$\sigma_b = \frac{\epsilon_0 \chi_e \lambda}{2\pi \epsilon a}$$



Perceba que carga ligada de polarização que surge junto ao fio com uma densidade linear

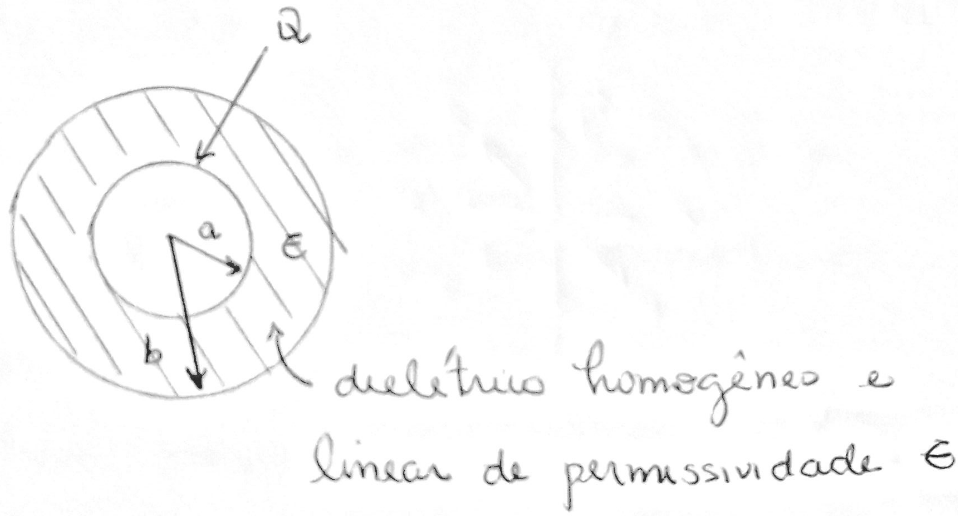
$$\frac{Q_\sigma(s)}{L} = -\frac{\chi_e}{\epsilon_r}\frac{Q_f}{L} = -\frac{\chi_e}{\epsilon_r}\lambda$$

é insuficiente para blindar totalmente a carga do fio como ocorreria caso o meio fosse condutor. Nessas condições, o campo elétrico não se anula no meio dielétrico, sendo apenas reduzido por um fator $1/\epsilon_r$.

Sendo assim, podemos considerar um meio dielétrico como um **mau** condutor.

—————//—————

Repitam os cálculos anteriores para o caso da esfera metálica de raio a e carga Q envolta por uma camada de material dielétrico de raio interno a e externo b.



Atenção novamente para o fato de que $\vec{E}$ e $\vec{D}$ possuem diferenças significativas mesmo para meios homogêneos lineares, onde:

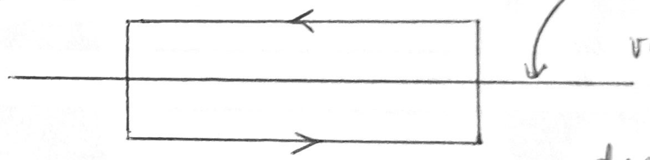
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

Enquanto a integral de linha de $\vec{E}$ em qquer caminho fechado é nula, já que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, mesmo quando $\vec{\nabla} \times \vec{P} = \vec{0}$ num meio dielétrico, na interface entre o meio e o vácuo

$\vec{P} = \vec{0}$

interface

vácuo



dielétrico

$\vec{P} \neq \vec{0}$ $(\vec{\nabla} \times \vec{P} = \vec{0})$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint \vec{P} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

No vácuo, é claro, $\vec{D}$ e $\vec{E}$ diferem apenas por uma constante e, portanto, $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$ e $\oint \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$.

Outra situação em que vale $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$ e $\oint \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$ é aquela de um dielétrico preenchendo todo o espaço, de modo que não precisamos nos preocupar com interfaces vácuo / dielétrico.

Quando $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$, há uma "lei de Coulomb" para $\vec{D}$ como consequência direta do teorema de Helmholtz. Então:

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \int \rho_f(\vec{r}\,') \frac{\hat{\imath}}{\imath^2} d\tau' = \epsilon_0 \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_f \frac{\hat{\imath}}{\imath^2} d\tau' \right\}$$

$$= \epsilon_0 \vec{E}_{vac}$$

onde $\vec{E}_{vac}$ é novamente o campo que existiria na região em questão caso não houvesse o dielétrico. Na ausência do dielétrico, não há cargas ligadas e as únicas fontes de campo são as cargas "livres" (extras).

Ainda nessa situação especial ($\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{0}$)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\epsilon_r}$$

Outra propriedade importante de meios homogêneos lineares é a relação entre ρ_b e ρ_f nesses meios

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\vec{\nabla}\cdot\left(\epsilon_0 \chi_e \vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{D}}{\epsilon}\right)$$

$$= -\frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon} \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{D}}_{=\rho_f} = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\,\rho_f$$

Logo, a menos que $\rho_f \neq 0$, no interior de um dielétrico o potencial satisfaz a eq. de Laplace, pois

$$\rho_f = 0 \Rightarrow \rho = \rho_b + \rho_f = 0$$

Podemos então aplicar as mesmas técnicas do bloco anterior para problemas envolvendo dielétricos, desde que conheçamos as condições de contorno.

Em problemas de condições de contorno envolvendo dielétricos, é útil adaptar as condições de contorno usadas para $V(\vec{r})$ e $\vec{E}(\vec{r})$ quando só conhecemos as cargas livres, de antemão.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \sigma_f$$

$$\Downarrow$$

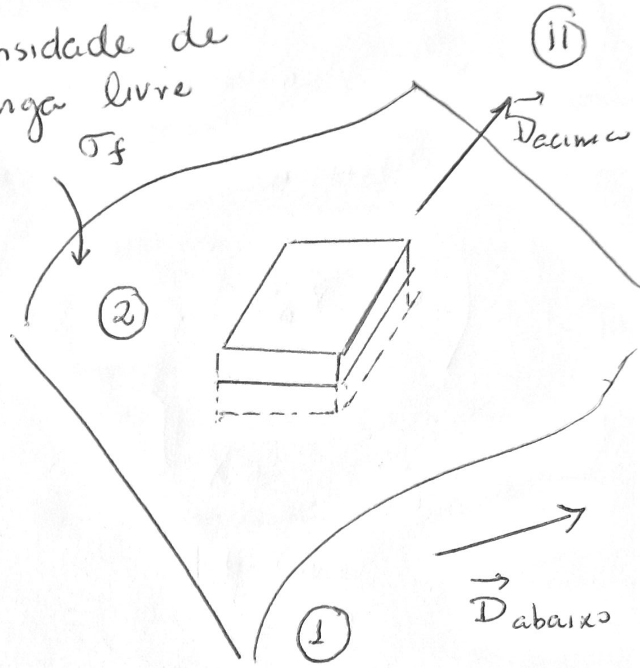
$$\boxed{D^{\perp}_{acima} - D^{\perp}_{abaixo} = \sigma_f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\epsilon_2 E^{\perp}_{acima} - \epsilon_1 E^{\perp}_{abaixo} = \sigma_f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = - \sigma_f}$$



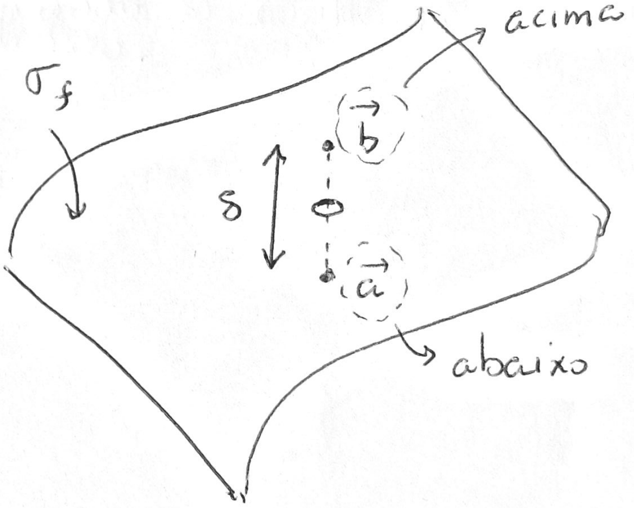
2 = "acima"

1 = "abaixo"

O potencial eletrostático continua contínuo

$$\boxed{V_2 = V_1}$$

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$



Exemplo: esfera de material dielétrico homogêneo linear colocada num campo elétrico inicialmente uniforme.

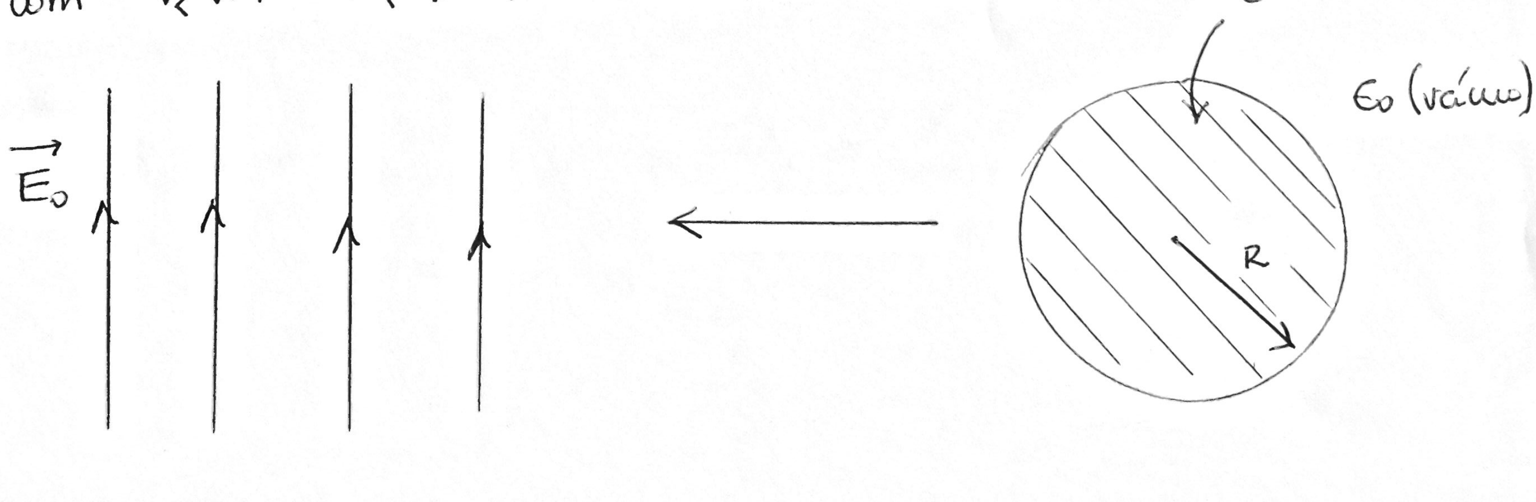
Como $\rho_f = 0$ neste problema, tanto dentro $(r < R)$ quanto fora $(r > R)$ da esfera, o potencial $V(\vec{r})$ satisfaz Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

e deve estar sujeito às seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} V_<(R) = V_>(R) \\ \epsilon \left.\dfrac{\partial V_<}{\partial r}\right|_R = \epsilon_0 \left.\dfrac{\partial V_>}{\partial r}\right|_R , \text{ já que } \sigma_f(r=R) = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} V_>(r) = - E_0 r \cos\theta \end{cases}$$

com $V_<(r) = V(r \leq R)$ e $V_>(r) = V(r \geq R)$



$$\begin{cases} V_i(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \\ V_s(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{cases}$$

a condição de continuidade do potencial em $r=R$ implica que

$$A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \quad e \quad A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \quad p/\ l \neq 1$$

Já a equação para a derivada normal implica

$$\epsilon_r A_1 = -E_0 - \frac{2B_1}{R^3}$$

e

$$\epsilon_r l A_l R^{l-1} = -\frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} \quad p/\ l \neq 1$$

Portanto

$$A_l = B_l = 0 \quad p/\ l \neq 1$$

e

$$A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad e \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0$$

Ou seja

$$V_<(r,\theta) = \frac{-3}{\epsilon_r + 2} E_0 r\cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z$$

$$V_>(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}\right)\frac{R^3 E_0}{r^2}\cos\theta$$

Perceba que no interior da esfera

$$\vec{E}_< = -\vec{\nabla} V_< = \frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}\hat{z} = \frac{3}{\epsilon_r + 2}\vec{E}_0 = \vec{E}(r<R)$$

Na região $r<R$, o campo $\vec{E}$ deve ser a superposição do campo inicialmente uniforme $\vec{E}_0$ com o campo gerado pela polarização da esfera

$$\vec{E}_< = \frac{3}{\epsilon_r + 2}\vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \vec{E}_0 + \frac{3}{\epsilon_r + 2}\vec{E}_0$$

$$= \vec{E}_0 + \left(\frac{3}{\epsilon_r + 2} - 1\right)\vec{E}_0 = \underbrace{\vec{E}_0}_{\substack{\text{campo externo} \\ \vec{E}_{ext}}} + \underbrace{\left(\frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r}\right)\vec{E}_0}_{\substack{\text{campo gerado} \\ \text{pela polarização} \\ \vec{E}_p}}$$

Na aula passada, vimos que o campo elétrico gerado por uma esfera com polarização uniforme $\vec{P}$, dentro da esfera é dado por

$$\vec{E}_p(r<R) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Calculemos a polarização da esfera dielétrica em questão:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_< = \epsilon_0 \chi_e \left(\frac{3}{\epsilon_r+2} \vec{E}_0 \right), \text{ com } \chi_e = \epsilon_r - 1$$

$$\vec{P} = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \vec{E}_0 \quad (\text{uniforme})$$

Então de fato

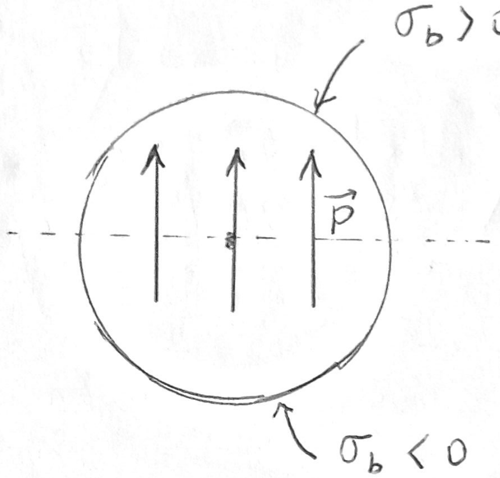
$$-\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \left(\frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r} \right) \vec{E}_0 = \vec{E}_p$$

Perceba que como $\epsilon_r > 1$, o campo de polarização é contrário ao campo externo $\vec{E}_0$.

Por fim, a densidade de carga ligada superficial em $r = R$ é dada por

$$\sigma_b(R) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} = \left[3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) E_0 \hat{z} \right] \cdot \hat{r}$$

$$\sigma_b = 3\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) E_0 \cos\theta$$



Calcule o campo elétrico a partir de $V_>(r)$ e separe a contribuição devido à polarização. Mostre que esse campo é igual àquele de um dipolo puro de momento $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$ na origem.