MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Lista 1

2020

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Defina as seguintes operações em V:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \;\text{ e }\; a \odot (x_1, y_1) = (ax_1, 0)$$

para todos $x_1, x_2, y_1, y_2, a \in \mathbb{R}$. É $(V, \oplus, \odot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?
Se definirmos agora

$$a \otimes (x, y) = (ax, ay), \text{ para todo } a, x, y \in \mathbb{R},$$

é $(V, \oplus, \otimes)$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

2. Seja $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$.
Defina em W as operações:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \;\text{ e }\; a \otimes (x, y) = (x^a, y^a),$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $(W, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. No espaço vetorial $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcular $2A + B - 3C$;
   (b) Determine X tal que
   $$\frac{A+X}{2} + \frac{X-B}{2} = C;$$
   (c) É possível determinar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $A = xB + yC$?

4. Em $P_3(\mathbb{R})$, sejam $f(t) = t^3 - 1, g(t) = t^2 + t - 1, h(t) = t + 2$.
   (a) Calcular $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$;
   (b) Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) + kg(t) = h(t)$?
   (c) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1g(t) + k_2h(t)$?

5. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial da funcões de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
   (a) Esboce, no mesmo sistemas de coodenadas os gráficos de $f(x) = x^3 - x$, de $-f$ e de $2f$.
   (b) Seja $g(x)$ a função $g(x) = x^2 + x$. Esboce no mesmo sistema de coordenadas os gráficos de f, g e $f + g$.

6. Verifique se W é um subespaço do espaço vetorial V nos seguintes casos:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;
   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
   (c) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + z = 1\}$;
   (d) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in V \mid A$ A é inversível$\}$;
   (e) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$; (Aqui $\det A$ é o **determinante** de A.)
   (f) $V = M_n(\mathbb{R})$ e $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$; (Aqui A^t é a **transposta** da matriz A.
   (g) $V = M_n(\mathbb{R})$, $B \in V$ uma matrix **fixa** e $W = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$;
   Observação: Nos itens (f) e (g), tente fazer primeiro no caso em que $n = 2$.
   (h) $V = P(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(0) = 2p(1)\}$;
   (i) $V = P(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid \text{grau} p \geq 3\}$;
   (j) $V = P_2(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(\alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}\}$;
   (k) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$;
   (l) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V \mid p(t) = at^3 + bt \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;
   (m) $V = \mathcal{C}([0, 1])$ e $W = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$;
   (n) $V = \mathcal{C}([0, 1])$ e $W = \{f \in V \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$;
   (o) $V = \mathcal{C}([0, 1])$ e $W = \{f \in V \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$;
   (p) $V = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in V \mid f$ tem uma tangente horizontal em $(0, f(0))\}$;
   (q) $V = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $W = \{f \in V \mid f' = 5f\}$.
   ($\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.)

7. Seja $(V, +, .)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e sejam W_1 e W_2 subespaços de V.

   (a) Mostre que $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.
   (b) Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

8. Sejam $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Determine $W_1 \cap W_2$ e interprete geometricamente.