MAT0221 - Cálculo Diferencial e Integral IV -IO
2o. Semestre de 2020 - 3a. Lista de exercícios - Séries

I) Verifique que

a) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$ b) arctg $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \leq 1$.

II) As expansões em séries de potências em torno de $a = 0$ das funções

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+25} \qquad f_2(x) = arctg(2x)$$

e seus respectivos valores de x para os quais essas expansões são válidas, são

a) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n+2}} x^{2n}$, $-1 < x < 1$. Para f_2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $-4 < x < 4$

b) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n}$, $-1/2 < x < 1/2$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $-1 < x < 1$

c) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n}} x^{2n}$, $-1 < x < 1$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$, $-4 < x < 4$

d) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n+2}} x^{2n}$, $-5 < x < 5$. Para f_2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

e) Para f_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n}} x^{n}$, $-1/2 < x < 1/2$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $-4 \leq x \leq 4$

III) As expansões em séries de potências em torno de $a = 0$ das funções

$$f_1(x) = \ln(\frac{1}{1+3x^2}) \qquad f_2(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^5} dt$$

e seus respectivos valores de x para os quais essas expansões são válidas, são

a) Para f_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^{2n}$, $-1/3 < x < 1/3$. Para f_2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} x^{2n}$, $-1 < x < 1$

b) Para f_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}$, $-1/\sqrt{3} \leq x \leq 1/\sqrt{3}$. Para f_2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} x^{5n+2}$, $-1 < x \leq 1$

c) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$, $-1 < x < 1$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{n}$, $-4/3 < x < 4/3$

d) Para f_1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n+2}} x^{2n}$, $-1/\sqrt{2} \leq x < 1/\sqrt{2}$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

e) Para f_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n^2}$, $-1/2 < x < 1/2$. Para f_2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $-2 \leq x \leq 2$

IV) Considere as seguintes séries convergentes:

$A)$ $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$

$B)$ $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + ...$

Analise as seguintes afirmações

I) a série $A = \frac{1}{(1-x)^2}$

II) a série $B = \ln(1-x)^2$

III) a série $A = \frac{1}{(1-x)^3}$

IV) a série $B = -\frac{1}{4}\ln(1-x^4)$

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a unica verdadeira

b) I) e II) são as únicas verdadeiras

c) III) é a única verdadeira

d) I) e IV) são as únicas verdadeiras

e) IV) é a única verdadeira

V) Sejam a série convergentes

$$A)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+2}} x^{n+3} = \frac{x^3}{(x-2)^2}, \qquad B)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+1} x^{7n+1} = c + \int \frac{dx}{1+x^7}$$

Analise as seguintes afirmações.

I) o raio de convergencia da representação A) é 1 e raio de convergencia da representação B) é 1

II) raio de convergencia da representação A) é 2 e então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{2n+5}} = \frac{1}{18}$

III) raio de convergencia da representação B) é 1 e então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{7n-6}(7n-6)} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^7}$

IV) raio de convergencia da representação A) é 2 e então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}} = -\frac{1}{9}$

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a única verdadeira

b) II) e III) são as únicas verdadeiras

c) I) e IV) são as únicas verdadeiras

d) II), III) e IV) sao as únicas verdadeiras

e) III) é a única verdadeira

VI) Considere as seguintes séries convergentes:

$$A)\ x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots \qquad B)\ x + 2x^3 + 3x^5 + \cdots + nx^{2n-1} + \cdots$$

Analise as seguintes afirmações

I) a série $A = \frac{x}{(1-x)^2}$ e o raio de convergência é $R = 1$

II) a série $B = \frac{x}{(1-x^2)^2}$ e então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{8}{9}$

III) a série $A = \frac{x}{(1-x)^2}$ e então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} = 1$

IV) a série $B = -\frac{x}{4}(1-x^2)$ e raio de convergência $R = 1$

Então são verdadeiras: (escolha uma resposta)

a) I) é a unica verdadeira

b) I), II) e III) são as únicas verdadeiras

c) III) é a única verdadeira

d) I) e IV) são as únicas verdadeiras

e) IV) é a única verdadeira

VII) A série de Taylor centrada no 0, e os intervalos de convergência das séries, das funções

$$A) \quad f(x) = x^2 e^x \qquad B) \quad f(x) = x\cos(2x)$$

são respectivamente

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!},\ -1 \leq x \leq 1 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{n!},\ x \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n^2},\ -1 \leq x \leq 1 \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!},\ -1 < x < 1$

VIII) O valor das derivadas $\frac{d^{320}arctg}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321}arctg}{dx^{321}}(0)$ são respectivamente iguais a:

a) 1 e (200)!

b) 0 e (320)!

c) 4! e (221)!

d) 0 e (200)!

e) 3! e (212)!

IX) Representações em séries de potências das funções

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt,\ com\ f(0) = 1$$
$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

e seus respectivos intervalos de convergência são

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ x \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)(n)!},\ x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)n!},\ -1 < x < 1$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n-1)!},\ -1 \leq x < 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!},\ x \in \mathbb{R}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n)!},\ x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ -1 \leq x \leq 1$

X) O valor do limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$$

é

a) $\frac{1}{6!}$, se $\alpha = 6$; 0 , se $\alpha < 6$; $-\infty$, se $\alpha > 6$

b) $\frac{1}{7!}$, se $\alpha = 7$; 0 , se $\alpha < 7$; ∞ , se $\alpha > 7$

c) $-\frac{1}{5!}$, se $\alpha = 5$; 0 , se $\alpha < 5$; $-\infty$, se $\alpha > 5$

d) $-\frac{1}{7!}$, se $\alpha = 7$; 0 , se $\alpha < 7$; $-\infty$, se $\alpha > 7$

c) $-\frac{1}{6!}$, se $\alpha = 6$; 0 , se $\alpha < 6$; ∞ , se $\alpha > 6$

XI) Considere a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n+2}} x^{2n},$$

Analise as seguintes afirmações

I) A série tem raio de convergência $R = 5$ e intervalo máximo de convergência $I = (-5, 5)$

II) A série converge absolutamente em $(-5, 5)$ e diverge em $x = 6$

III) A série converge uniformemente em $[-1, 1]$

IV) A série diverge em $x = 5$ pelo critério da divergência

São corretas:

a) I) e II) são as únicas corretas

b) II) e III) e IV) são as únicas corretas

c) IV) é a única correta

d) Todas são corretas

e) III) é a única correta

XII) Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$$

Analise as seguintes afirmações

I) A série tem raio de convergência $R = \infty$

II) A série converge absolutamente pelo critério da razão em $(-\infty, \infty)$

III) A série converge uniformemente em $(-\infty, \infty)$

IV) A série diverge para todo $x \in (-\infty, \infty)$

São corretas:

a) I) e III) são as únicas corretas

b) II) e III) são as únicas corretas

c) IV) é a única correta

d) II) é a única correta

e) III) é a única correta

XIII) Considere a sequência de funções $\{\frac{n+x^2}{n}\}$ para $|x| < 2$.

Analise as seguintes afirmações

I) Pelo teorema do confronto a sequência converge para 1

II) A sequência converge uniformemente em $|x| < 2$

III) A sequência diverge em todo $x \in (-2, 2)$

IV) A sequência é decrescente independe do valor de x

São corretas:

a) I) e II) são as únicas corretas

b) II) e III) são as únicas corretas

c) IV) é a única correta

d) III) é a única correta

e) I), II) e IV) são as únicas corretas

XIV) Considere as funções $h(x) = e^{x^2}$ definida em $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ definida em $x > 0$. Considere tambem a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$$

Analise as seguintes afirmações

I) A série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{x^2} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $x \in (-\infty, \infty)$

II) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $x > 0$

III) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x^2} - \frac{1}{x}) \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $x > 0$

IV) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{x^2} . \frac{1}{x}) \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^3}$ converge uniformemente em $x \in (-\infty, \infty)$

São corretas:

a) I) e III) são as únicas corretas

b) II) e III) são as únicas corretas

c) IV) é a única correta

d) I), II) e III) são as únicas corretas

e) Todas são corretas

XV) Estude as representações em séries de potências das funções básicas:

1) $\frac{1}{1-x}$

2) e^x

3) $\sin(x)$

4) $\cos(x)$

5) $\ln(1-x)$

6) $\arctan(x)$

junto com seus intervalos de convergência.

RESPOSTAS

II) d III) b IV) d V) c: Corregir II) e IV) sao as unicas verdaderias

VI) b VII) item a) e c) estao iguais. A serie de taylor de A) é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$ e para B) é $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{2(2n)!}$.

VIII) b IX) b X) d XI) d XII) a XIII) e XIV) e