Resolução da Segunda prova

Nícolas André da Costa Morazotti

5 de outubro de 2020

1 Primeira Questão

No circuito da figura 1, o capacitor tem, inicialmente, carga $Q(0) = 1mC$. Suponha que as placas do capacitor têm área A, que a separação entre elas é d e que a constante dielétrica do meio é κ para calcular a corrente de deslocamento no interior do capacitor, em função do tempo. Interprete fisicamente o sinal da sua expressão.

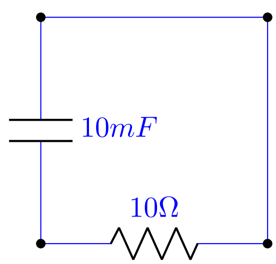


Figura 1: Questão 1

Para calcular a corrente de deslocamento, precisamos da carga do capacitor para então obter o campo $\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E}$:

$$RI + \frac{Q}{C} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q = 0 \tag{2}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \tag{3}$$

Agora que temos a carga, utilizâ-mo-la em

$$E = \frac{Q(t)}{A\kappa\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$\frac{I_D}{A} = \kappa\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{A}\frac{\partial Q(t)}{\partial t} \tag{6}$$

$$= -\frac{1}{ARC}Q_0 e^{-t/RC} \tag{7}$$

$$I_D = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}, \tag{8}$$

que é a derivada da carga $Q(t)$ no tempo. Isso se dá pois a corrente total do circuito é exatamente essa, mas dentro do capacitor não há corrente de cargas.

Substituindo os valores numéricos,

$$I_D = -10mAe^{-10t}. \tag{9}$$

2 Segunda Questão

Dado o circuito da figura 2 e considerando $\mathcal{E} = 10\cos(10t)V$,

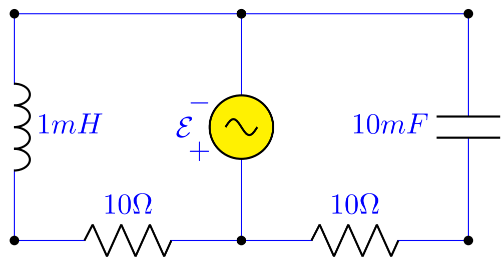
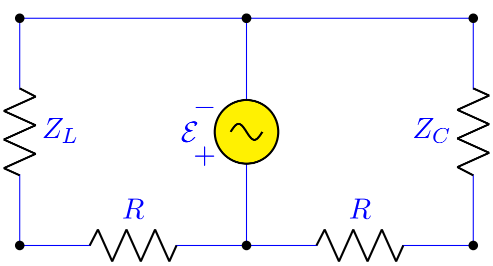


Figura 2: Questão 2

(a) Calcule a corrente que atravessa a fonte de tensão no regime estacionário.

No regime estacionário, podemos lançar mão do método das impedâncias.



Veja que temos dois ramos paralelos com impedâncias em série. Assim, podemos simplificar as impedâncias como

$$Z_{dir} = R - \frac{i}{\omega C} \tag{10}$$
$$Z_{esq} = R + i\omega L. \tag{11}$$

Ao invés de calcular a impedância equivalente do circuito, vamos calcular a corrente em cada ramo e somar ambas:

$$Z_{dir}u_{dir} = 10e^{i10t} \tag{12}$$
$$u_{dir} = \frac{10}{10-10i}e^{i10t} \tag{13}$$
$$= \frac{1}{1-i}e^{i10t} \tag{14}$$
$$= \frac{1+i}{2}e^{i10t}. \tag{15}$$

O ramo da esquerda, por sua vez, tem uma corrente

$$
\begin{aligned}
Z_{esq} u_{esq} &= 10 e^{i10t} && (16)\\
u_{esq} &= \frac{10}{10 + i10 \cdot 10^{-3}} e^{i10t} && (17)\\
&= \frac{1}{1 + i10^{-3}} e^{i10t} && (18)\\
&= \frac{1 - i10^{-3}}{1 + 10^{-6}} e^{i10t}. && (19)
\end{aligned}
$$

Somando as duas correntes e tomando a parte real,

$$
\begin{aligned}
u_{dir} + u_{esq} &= \left(\frac{1+i}{2} + \frac{1 - i10^{-3}}{1 + 10^{-6}} \right) e^{i10t} && (20)\\
&= \left(\frac{1 + 10^{-6} + i + i10^{-6} + 2 - 2i10^{-3}}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} \right) e^{i10t} && (21)\\
&= \left(\frac{3 + 10^{-6}}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} + i \frac{1 - 2 \cdot 10^{-3} + 10^{-6}}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} \right) e^{i10t} && (22)\\
&= \left[\frac{3 + 10^{-6}}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} + i \frac{(1 - 10^{-3})^2}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} \right] e^{i10t} && (23)\\
\Re u &= \left[\frac{3 + 10^{-6}}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} \cos(10t) - \frac{(1 - 10^{-3})^2}{2 + 2 \cdot 10^{-6}} \sin(10t) \right]. && (24)
\end{aligned}
$$

(b) A partir do resultado da questão 2a, explique fisicamente se o circuito está ou não na ressonância.

Pelo resultado, podemos dizer que o circuito não está na ressonância; como usual, caso estivesse em tal regime, os elementos indutivos e capacitivos não causariam quedas de tensão, e a corrente na fonte de tensão seria dada simplesmente por

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{10 \cos(10t)}{R/2} && (25)\\
&= 2 \cos(10t). && (26)
\end{aligned}
$$

Em ressonância, a corrente e a tensão estão em fase, o que não ocorre na equação 24.