MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 9 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Defina $Z_n = \max\{X_1,...,X_n\}$ e $V_n = n(1-Z_n)$. Prove que:

a) $Z_n \to^P 1$.

b) $V_n \to^D W$ onde W tem distribuição exponencial padrão.

Solução

a)
Provemos que $Z_n \to^P 1$

$$P(|Z_n - 1| \leq \varepsilon) = P(|\max\{X_1,...,X_n\} - 1| \leq \varepsilon) =$$

$$P(1 - \max\{X_1,...,X_n\} \leq \varepsilon) = P(\max\{X_1,...,X_n\} \geq 1-\varepsilon) =$$

$$1 - P(X_1 \leq 1-\varepsilon, X_2 \leq 1-\varepsilon, ..., X_n \leq 1-\varepsilon) =$$

$$1 - \Pi_{i=1}^n P(X_i \leq 1-\varepsilon) = 1 - (P(X_1 \leq 1-\varepsilon))^n = 1 - (1-\varepsilon)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - 1| \leq \varepsilon) =$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - (1-\varepsilon)^n = 1.$$

b)

Calculemos a função de distribuição de V_n

$$P(V_n \leq v) = P(V_n = n(1 - Z_n) \leq v) = P(1 - Z_n \leq \frac{v}{n}) =$$

$$P(Z_n \geq 1 - \frac{v}{n}) = 1 - P(Z_n \leq 1 - \frac{v}{n}) =$$

$$1 - P(X_1 \leq 1 - \frac{v}{n}, X_2 \leq 1 - \frac{v}{n}, ..., X_n \leq 1 - \frac{v}{n}) =$$

$$1 - \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \leq 1 - \frac{v}{n}) = 1 - (P(X_1 \leq 1 - \frac{v}{n}))^n = 1 - (1 - \frac{v}{n})^n.$$

Portanto

$$\lim_{n \to \infty} P(V_n \leq v) =$$

$$\lim_{n \to \infty} 1 - (1 - \frac{v}{n})^n = 1 - e^{-v}.$$

2) Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = \mu_X$ e $Var(X_1) = \sigma_X^2$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_1] = \mu_Y$ e $Var(Y_1) = \sigma_Y^2$. Suponha que os X_j e os Y_k sejam independentes e que $\mu_X \neq 0$. Qual o limite em distribuição de

$$Z_n = \sqrt{n}(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}).$$

Obs: $Z_n = \sqrt{n}(\frac{\mu_X \overline{Y}_n - \mu_Y \overline{X}_n}{\mu_X \overline{X}_n})$.

Solução

Observe que $\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n$ tem média igual a

$$E[\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n] = E[\mu_X\overline{Y}_n] - E[\mu_Y\overline{X}_n] =$$

$$\mu_X E[\overline{Y}_n] - \mu_Y E[\overline{X}_n] = \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X = 0$$

e que pelas hipóteses de independência entre as variáveis e entre as sequências de variáveis temos

$$Var(\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n) = Var(\mu_X\overline{Y}_n) + Var(\mu_Y\overline{X}_n) =$$

$$\mu_X^2 Var(\overline{Y}_n) + \mu_Y^2 Var(\overline{X}_n) =$$

$$\mu_X^2\frac{\sigma_Y^2}{n} + \mu_Y^2\frac{\sigma_X^2}{n}.$$

Contudo podemos escrever

$$\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n(\mu_X Y_i + \mu_Y X_i)$$

E sob a associação de independência entre as variáveis e entre as sequências de variáveis, aplicando o Teorema do Limite Central (TLC) concluimos que

$$\sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n(\mu_X Y_i + \mu_Y X_i - 0)}{\sqrt{\mu_X^2\sigma_Y^2 + \mu_Y^2\sigma_X^2}} \to^D N(0,1).$$

Em adição, pela Lei Fraca dos Grandes Números temos que $\overline{X}_n \to^P \mu_X$ e $\mu_X.\overline{X}_n \to^P \mu_X^2$.

Pelo Teorema de Slutsky temos

$$Z_n = \sqrt{n}(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}) \to^D \frac{1}{\mu_X^2}N(0, \mu_X^2\sigma_Y^2 + \mu_Y^2\sigma_X^2).$$

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. tais que $E[X_1] = 0$. Ache o $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t)$, onde $Y_n = cos(\overline{X}_n)$.

Solução

Queremos encontrar o $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t)$ onde $Y_n = \cos(\overline{X}_n)$.

Pela Lei Fraca dos Grandes Números temos $\overline{X}_n \to^P 0$ e como cos(.) é uma função contínua $Y_n = \cos(\overline{X}_n) \to^P \cos(0) = 1$.

Contudo convergência em probabilidade implica convergência em distribuição e portanto $Y_n \to^D 1$. Como $\varphi(t) = e^{it}$ é uma função contínua e limitada, Pelo teorema de Helly-Bray temos $\varphi_{Y_n}(t) = E[e^{itY_n}] \to e^{it}$ quando $n \to \infty$.