FUNCÕES CARACTERÍSTICAS

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Outubro de 2020

Observação Seja Y uma variável aleatória com distribuição normal padrão e c uma constante real a função característica de cY é $\varphi_{cY}(t) = e^{-\frac{c^2t^2}{2}}$. Seja X uma variável aleatória, independente de Y, com função característica $\varphi_X(t)$.
A função característica de $Z = X + cY$ é

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t).e^{-\frac{c^2t^2}{2}}.$$

Como $\varphi_Z(t)$ é integrável, aplicamos o teorema acima e obtemos

$$f_z(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt.$$

Funções características

Se integramos a expressão acima sobre o intervalo $(a, b]$ e aplicamos o teorema de Fubine temos

$$P(a < X + cY \leq b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{a}^{b} e^{-itx}dx)\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{e^{-ibt} - e^{-iat}}{-it})\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt.$$

Fazendo c convergir para 0 e a convergir para $-\infty$ na expressão acima, obtemos a função de distribuição de X que, pela expressão à direita, depende exclusivamente da função característica de X. O resultado é enunciado abaixo.

Funções características

Teorema 1 Teorema da Unicidade
Se duas variáveis aleatórias tem mesma função característica, então tem mesma função de distribuição.

Exemplo 1
Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e $p, 0 < p < 1$ e seja Y uma variável aleatória, independente de X, com distribuição binomial de parâmetros m e $p, 0 < p < 1$. As funções características de X e Y são

$$\varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n \quad e \quad \varphi_Y(t) = (q + pe^{it})^m$$

respectivamente, onde $q = 1 - p$.
Portanto $\varphi_{X+Y}(t) = (q + pe^{it})^{n+m}$ e concluimos que $X + Y$ tem distribuição binomial de parâmetros $n + m$ e $p, 0 < p < 1$.

Exemplo 2 Se X é uma variável aleatória com função característica $\varphi_X(t) = cos^2(t)$, qual sua função de probabilidade?
Observe que a função característica é real , isto é
$\varphi_X(t) = E[cosXt]$.
Podemos, tambem,escrever que

$$\varphi_X(t) = cos^2(t) = \frac{1 + cos2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2t.$$

Se definimos $X = 0$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ e $X = 2$ com probabilidade $P(X = 2) = \frac{1}{2}$ obtemos, pelo teorema da unicidade, o resultado.

Funções características

No que segue enunciaremos os teoremas que relacionam a convergência em distribuição com a convergência das respectivas funções características.

Teorema 2 Teorema de Helly-Bray
Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias. Sejam $(F_n)_{n\geq 1}$ e F as suas respectivas funções de distribuições tais que $F_n \to^D F$. Então, para toda função g contínua e limitada temos

$$E[g(X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = E[g(X)].$$

Observação 2

Em particular, podemos aplicar o teorema acima para as funções $cos(t)$ e $sen(t)$ que são contínuas e limitadas, obtendo

$$\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (cos(tx) + isen(tx)) dF_n(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) dF_n(x) + \int_{-\infty}^{\infty} isen(tx) dF_n(x) \to_{n\to\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} sen(tx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \varphi_X(t).$$

Funções características

Exemplo 3 Se $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada , então podemos representar $f(t)$ por

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Claramente , a representação é resultado do teorema de Helly-Bray, quando consideramos variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Bernoulli de parâmetro t.

Teorema 3 Teorema da continuidade de Paul-Levy
Seja $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e $(\varphi_{X_n})_{n\geq 1}$ a sequência de suas respectivas funções características. Se $\varphi_{X_n}(t)$ converge pontualmente para $\varphi(t)$ e φ é contínua no ponto 0, então:
a) Existe uma variável aleatória X, com função de distribuição F_X tal que $F_n \to^D F$ e
b) φ é função característica de X.

Prova Pela fórmula da inversão temos

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{X_n}(t)dt.$$

Seja

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Portanto

$$P(a < X_n \leq b) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{X_n}(t)dt\right)dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_a^b e^{-itx}dx\right)\varphi_{X_n}(t)dt,$$

e, pelo teorema da convergência dominada temos

Funções características

$$\lim_{n\to\infty} P(a < X_n \leq b) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_a^b e^{-itx}dx)\varphi_{X_n}(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_a^b e^{-itx}dx)\varphi_X(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}(\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}dx)\varphi_X(t)dt = \int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b).$$

Assim

$$P(X_n \leq b) = \lim_{a\to-\infty} P(a < X_n \leq b) = \lim_{a\to-\infty} P(a < X \leq b) = P(X \leq b).$$

Exemplo 4 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim B(n,p)$ e tal que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$.
A função característica de X_n é

$$\varphi_{X_n}(t) = (1 - p + pe^{it})^n = (1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it})^n = (1 - \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1))^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t)$$

que é contínua no ponto 0 e é a função característica de uma variável aleatória com distribuição de Poisson.

Exemplo 5 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim N(0,n)$ com função característica $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2 n}{2}}$.

Assim
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = 1 \quad se \quad t = 0 \quad e \quad 0 \quad se \quad t \neq 0$$
que não é contínua em $t = 0$ e portanto não é função característica.

Observe que

$$P(X_n \leq x) = P(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} = P(Z \leq \frac{x}{\sqrt{n}}) \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

que não é função de distribuição.

Observação 3 Se z é um número complexo tal que $|z-1|<1$, podemos definir, através da série de Taylor

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \ldots.$$

Portanto se se $|z-1|<1$ temos as propriedades usuais: $z = e^{\ln z}$, $\ln 1 = 0$. Se X é uma variável aleatória, a sua função característica $\varphi_X(t)$ é contínua, $\varphi_X(0) = 1$ e assim $\ln \varphi_X(t)$ é bem definida para t próximo de zero.

Funções características

Se $E[X] = \mu < \infty$, então $\varphi_X^{'}(0) = i\mu$. Portanto

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln \varphi_X(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(0)}{t} =$$

$$\frac{d \ln \varphi_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\varphi_X^{'}(0)}{\varphi_X(0)} = i\mu.$$

Consequentemente temos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t} = 0.$$

Suponha que $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, então

$$\varphi_X^{''}(0) = -E[X^2] = -(\mu^2 + \sigma^2).$$

Funções características

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\varphi_X(t)-i\mu t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}-i\mu}{2t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X'(t)-i\mu\varphi_X(t)}{2t\varphi_X(t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X''(t)-i\mu\varphi_X'(t)}{2\varphi_X(t)+2t\varphi_X'(t)}=$$

$$\frac{\varphi_X''(0)-i\mu\varphi_X'(0)}{2\varphi_X(0)}=\frac{-(\mu^2+\sigma^2)-(i\mu)^2}{2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\varphi_X(t)-i\mu t}{t^2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Teorema 4 Teorema do Limite Central

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média $E[X_1] = \mu$ e variância $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = P(Z \leq x), \quad -\infty < x < \infty.$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e Z tem distribuição normal padrão.

Funções características

Prova Seja $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. então

$$\varphi_{S_n^*}(t) = E[e^{itS_n^*}] = E[e^{it(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})}] =$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} E[e^{\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}}] =$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n.$$

Portanto

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \exp\{n[\ln \varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]\}.$$

Funções características

Contudo

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln \varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{\sigma^2}\frac{\ln \varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}) - i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}{(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^2} =$$

$$\frac{t^2}{\sigma^2}(-\frac{\sigma^2}{2}) = -\frac{t^2}{2}.$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_Z(t).$$

Pelo teorema da unicidade temos o resultado.

Funções características

Como uma extensão do Teorema do Limite Central, pode-se provar que (ver Barry James)

Teorema 5 Sejam $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \to^D N(0, \sigma^2).$$

Se g(y) é uma função derivável no ponto μ, então

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \to^D N(0, \sigma^2(g^{'}(\mu))^2).$$

Exemplo 6 Pelo Teorema do limite central temos

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^D N(0,1)$$

que é equivalente a

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to^D N(0,1).$$

Pelo Teorema de Slutsky concluimos que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \to^D N(0,\sigma^2).$$

Pelo teorema anterior, se consideramos $g(x) = x^2$, temos

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \to^D N(0,4\mu^2\sigma^2).$$

Se consideramos $g(x) = \frac{1}{x}$ temos, se $\mu \neq 0$

$$\sqrt{n}(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\mu}) \to^D N(0,\frac{\sigma^2}{\mu^4}).$$