→ Objetivo: Como e quando podemos representar funções como uma série de potências.

→ Séries de Taylor:

Teorema 1: Se f tiver uma representação em série de potências em a, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad , \text{com } |x-a| < R \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ os coeficientes c_n precisam satisfazer

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad , \forall n \geq 0.$$

Nota: 1) A série na equação $(*)$ acima é chamada a série de Taylor da função f em a. No caso $a \equiv 0$ a série é conhecida como a série de Maclaurin.

2) Dado $f : I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo t.q.

i) $a \in I$

ii) $f^{(n)}(a)$ existem pra todo $n \geq 0$

podemos sempre $\boxed{\text{construir a série de Taylor}}$

$$\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n . \qquad (**)$$

Assim, usando o teorema 1 ... sempre existe $R \in [0, +\infty]$ t.q. $\forall x$ com $|x-a| < R$ a série $(**)$ converge. Logo vai existir $g : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ bem definida t.q.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

→ Grande problema: Quando podemos dizer que $g \equiv f$??

Não sempre é certo!!

Prova do teorema (1): Como $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ temos

1) ~~Como~~ para $x=a$, $f(a) = C_0$

2) pelo visto na aula podemos diferenciar a igualdade acima e assim

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-a)^{n-1}, \quad |x-a|<R$$

$$\Rightarrow \quad f'(a) = C_1$$

3) ~~repitindo o processo acima~~ Repitindo o processo acima obtemos $\forall n \geq 2$ que $f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 2 1 \dots n C_n \equiv n! C_n$

$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad //$$

Exemplos: 2) Determinar a série de Taylor para $f(x) = e^x$ no ponto $x = 0$ e determinar seu raio de convergência.

Solução: 1) $\forall n \geq 0$ $\quad f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

2) Série de Taylor: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

3) raio de convergência: Usando o Teste da razão com $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ o raio de convergência é $R = +\infty$ e a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

*) nas proximas folhas veremos que de fato $e^x \equiv \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$!!

b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução: pelo problema anterior temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente $\Rightarrow$ precisamos ter que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ //.

c) Determinar a série de Taylor para $f(x) \equiv \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ no ponto $a=0$ (a série de Maclaurin) e determinar seu raio de convergência //

Solução: 1) $f^{(n)}(x)$ é $\pm \operatorname{sen} x$ ou $\pm \cos x$ $\Rightarrow$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ (-1)^K, & n \text{ impar}, n = 2K+1, \; K = 0,1,2,3\ldots \end{cases}$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \cancel{\sum_{n \text{ par}}}^{\,0} + \sum_{n \text{ impar}} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K+1)!} x^{2K+1}$$

3) É facil ver que o raio de convergência é $R = +\infty$.

4) Conclusão: a série de Taylor da função <u>sen x</u> é

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K+1)!} x^{2K+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (***)$$

5) Agora para $g(x) = \cos x$, temos $g^{(n)}(x)$ é $\pm \cos x$, ou $\pm \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ (-1)^K, & n = 2K, \; K = 0,1,2,3 \end{cases}$$

Logo $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \cancel{\sum_{n \text{ impar}}}^{\,0} + \sum_{n \text{ par}} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(2K)!} x^{2K} \quad //$$

Série de Taylor da função $\cos x$ //

4

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-5)^n$ para todo x, escreva uma formula para b_9.

Solução: 1) $b_n = \frac{f^{(n)}(5)}{n!}, \forall n \Rightarrow b_9 = \frac{f^{(9)}(5)}{9!}$ //

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Determinar a Série de Taylor para f em $a=0$ //

Solução: 1) $f(0) = 0$

2) $\cancel{f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}}$

defina para $x>0$, $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow$

- $f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} e^{-y}\sqrt{y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = 0$

- Seja $x<0$, $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow$

$f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} -\frac{e^{-y}\sqrt{y}}{\cancel{y}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} = 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$.

3) usando indução podemos ver que $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \geq 2$

4) Série de Taylor da f: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$

5) OPA!! O que aconteceu?!

Não sempre a função é igual a sua série de Taylor!!

→ objetivo: Baixo quais condições uma função dada é igual à soma da sua série de Taylor !!

Ou seja, se $f^{(n)}(x)$ existe $\forall x \in I$ e $a \in I$, quando

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad ?$$

→ Como toda série convergente, precisamos ver quando suas somas parciais. $T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, $n \geq 0$

são convergentes para $x \in I$, fixo !!

→ "A seqüência de funções" $\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$ é chamada a seqüência de polinômios de Taylor.

→ ~~Tn é chamado~~ $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é chamado polinômio de Taylor de grau n de f em a.

Exemplos: a) Para $f(x) = e^x$, e $a=0$, os polinômios de Taylor de grau $n = 0, 1, 2, 3, 4$, são.

$T_0(x) \equiv 1$, $T_1(x) = 1 + x$, $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

b) Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\cancel{x} = 0$, os polinômios de Taylor de grau $n = 1, 2, 3$, são

$$T_1(x) = \sum_{i=0}^{1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = 0 + \frac{\overbrace{f'(0)}^{=\cos(0)}}{1} x = x$$

$$T_2(x) = x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 = x$$

$$T_3(x) = x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{3!}x^3 \text{ //.}$$

→ Continuando com o nosso problema de convergência, teremos que $f(x)$ é a sua soma da série de Taylor se $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$!!.

Portanto, se considerarmos o "Resto" $R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x)$ ou seja $f(x) \equiv R_n(x) + T_n(x)$ e $\boxed{\text{Se lograrmos mostrar}}$ que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - R_n(x)] = f(x)$$

Logo temos o seguinte Teorem:

<u>Teorema 2</u>: Considere o resto $R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x)$ com T_n o polinômio de Taylor de grau n de f em $x=a$ para $|x-a|<R$

Se $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} T_n(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n; \quad |x-a|<R.$$

→ Como mostramos que $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? O seguinte resultado fornece um critério chamado de Desigualdade de Taylor:

Teorema 3. (Desigualdade de Taylor): Se temos

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M \quad \forall\ |x-a| \le d,$$ então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$ para x t.q. $|x-a| \le d$.

Nota: 1) $d>0$ no teorema acima do raio de convergência da Série de Taylor associada a f em $x=a$!!

2) Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \forall x$

(ver exemplo b) na pg. 3)

temos que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \implies$

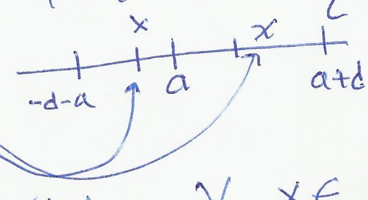
Pelo teorema 2, podemos concluir a igualdade

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$ com, $|x-a| \le d$!!

→ Prova do teorema 3:

1) Seja $n=1$, e veamos que $|R_1(x)| \le \frac{M}{2}|x-a|^2$:

Suponha $|f''(x)| \le M$ para



$\implies$ ~~para~~ em particular $f''(x) \le M \quad \forall\ x \in [-d-a, a+d]$ //

a) para $x \in [a, a+d]$ temos então

$$f'(x) - f'(a) = \int_a^x f''(t)\,dt \le \int_a^x M\,dt = M(x-a). \quad // \quad (+)$$

b) Integrando outra vez em (+) temos

$$\int_a^x f'(t)\,dt \le \int_a^x [f'(a) + M(\cancel{x}\,t-a)]\,dt$$

$$\| $$

$$f(x) - f(a) \le f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2} \qquad (++)$$

c) Como $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

obtemos de $(++)$ imediatamente

$$R_1(x) \le \frac{M}{2}(x-a)^2$$

d) Como um argumento similar pode ser feito no caso

$f''(x) \ge -M$ e $x \in [-d+a, a]$,

obtemos também que $R_1(x) \ge -\frac{M}{2}(x-a)^2$

$$\Rightarrow |R_1(x)| \le \frac{M}{2}|x-a|^2$$

O caso $n \ge 2$ é provado similarmente via pela integração de $n+1$ vezes. Por exemplo, para $n=2$, suponha $|f'''(x)| \le M$

$\Rightarrow f'''(x) \le M \Rightarrow$ para $x \in [a, a+d]$, $f''(x) \le M(x-a) + f''(a)$

$$\Rightarrow f'(x) \le f'(a) + \frac{M}{2}(x-a)^2 + f''(a)(x-a) \Rightarrow$$

$$f(x) - f(a) \le f'(a)(x-a) + \frac{M}{2\cdot 3}(x-a)^3 + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$\Rightarrow R_2(x) \le \frac{M}{6}(x-a)^3 \quad //.$$

3) logo similar como no caso $n=1$, temos $|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x-a|^3$.

Exemplos: a) Mostre que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Solução: 1) pelo exemplo a) na pg. 2 a série de Taylor associada a $f(x) = e^x$ é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Seja $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x$. Agora $\forall d > 0$ e $|x| \leq d$ temos $|f^{(n+1)}(x)| \leq e^d \equiv M$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, com $|x| \leq d$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Rightarrow$

$$f(x) = e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para $|x| \leq d$.

3) Como d foi escolhido arbitrario, temos então que $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

b) Mostre que $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Solução: 1) para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(n+1)}$ é $\pm \operatorname{sen} x$ ou $\pm \cos x \Rightarrow$
$|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Logo $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Rightarrow$

$$f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pelo exemplo c) na pg 3.

1) Mostre que $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$, $a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução: $a^x = e^{x \log a} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Exemplo a)} \\ \text{Pg } 9}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x \log a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$ $x \in \mathbb{R}$.

2) Mostre que $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$.

Solução: 1) Sabemos $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

2) $\cos(2x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Exemplo 5} \\ \text{Pg } 3}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}$

3) $\frac{1}{2}\cos(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

4) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

3) Determine o coeficiente C_{98} no desenvolvimento em série de Taylor de $\operatorname{sen}(2x + \frac{1}{4}\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

Solução: 1) Seja $f(x) = \operatorname{sen}(2x + \frac{1}{4}\pi)$. Sabemos que

$$C_{98} = \frac{f^{(98)}(0)}{(98)!}$$

2) Como $\forall k \geq 0$, $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \operatorname{sen}(2x + \pi/4)\, 2^{2k}$, $f^{(98)}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} 2^{98}$

então $C_{98} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{(98)!} 2^{98}$ //.