MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 10 (05/10/2020)

Vimos na aula passada:

Dois conjuntos A e B são equipotentes ($A \sim B$) se existir uma bijeção $f : A \to B$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Se A é um conjunto, dizemos que:

- A é finito se $A \sim F_n$ para algum n, ou se $A = \varnothing$.
- A é infinito se A não for finito.
- A é enumerável se $A \sim \mathbb{N}$.
- A é no máximo enumerável se A for finito ou enumerável.
- A é infinito não enumerável se A não for finito nem enumerável.

Vimos na aula passada:

Teorema 1

$\mathbb{Z}$ é enumerável

Teorema 2

Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Teorema 3

Seja $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis.

Então o conjunto $U = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é enumerável.

Consequências do Teorema 3

Corolário 1

A união finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Corolário 2

Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são conjuntos finitos ou enumeráveis, então $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ é no máximo enumerável.

Produto cartesiano de conjuntos enumeráveis

Teorema 4

Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Então o produto cartesiano

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

é enumerável.

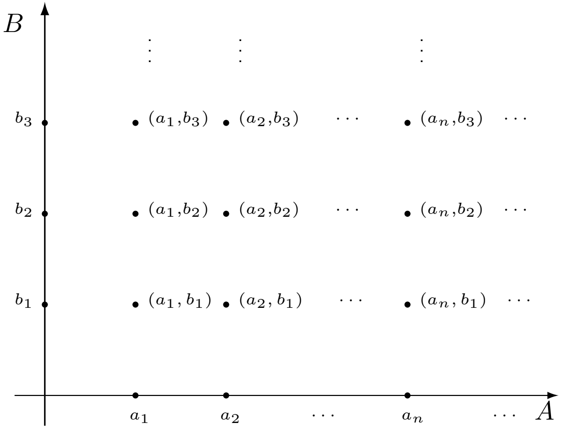
- Para cada $a \in A$ fixado, considere o conjunto

$$B_a = \{(a,b) : b \in B\}$$

- $B_a \sim B$ (Por quê?...)
- B_a é enumerável.
- Mas note que $A \times B = \bigcup_{a \in A} B_a$

Portanto, pelo Teorema 2, $A \times B$ é enumerável.

Produto cartesiano de conjuntos enumeráveis



$\mathbb{Q}$ é enumerável

Teorema 5

O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Defina a função

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$$

$$f(p,q) = \frac{p}{q}$$

- O domínio de f é um conjunto enumerável. (Por quê?...)
- f é sobrejetora. (Por quê?...)
- Observe que f não é injetora! (Por quê?...)
  $f(1,2) = f(2,4) = f(3,6) \dots$
- A imagem de f pode ser finita? Temos que $f(n,1) = n$. Logo, a imagem de f contém $\mathbb{Z}$, que é infinito.

Podemos concluir que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Um conjunto infinito não enumerável

Teorema 6

O intervalo $[0,1]$ é infinito e não enumerável.

- O intervalo $[0{,}1]$ contém o conjunto infinito $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Logo, $[0,1]$ é também infinito.
- Suponha, por absurdo, que $[0,1]$ seja enumerável. Logo existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to [0,1]$
- Defina $f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3,$ ...
- Podemos escrever cada x_j na forma decimal infinita.
  Para evitar ambiguidade, os números de representação decimal finita serão escritos com infinitos algarismos iguais a 9. Por exemplo, o número $0{,}27$ será escrito na forma $0{,}26999\ldots$ e o número 1 será escrito como $0{,}999\ldots$

Um conjunto infinito não enumerável - continuação

Assim, podemos listamos todos os números reais entre 0 e 1:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0{,}a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\ldots \\ x_2 & = & 0{,}a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\ldots \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & 0{,}a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\ldots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

sendo $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ os algarismos da representação decimal de x_i.

Um conjunto infinito não enumerável - continuação

Vamos agora definir o número

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$$

que tem suas casas decimais $b_1, b_2, b_3, \ldots$ escolhidas da seguinte maneira:

$b_1 = 5$, se $a_{11} \neq 5$ e $b_1 = 6$, se $a_{11} = 5$;
$b_2 = 5$, se $a_{22} \neq 5$ e $b_2 = 6$, se $a_{22} = 5$;
e assim por diante.

Ou seja, para cada n, definimos
$b_n = 5$, se $a_{nn} \neq 5$ e $b_n = 6$, se $a_{nn} = 5$.

Pergunta: Existe tal número $b \in \mathbb{R}$?
$\left(\text{Lembre-se de que } b = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{10^j} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

Um conjunto infinito não enumerável - continuação

Mas veja que interessante:

- o número b é diferente de x_1, pois, $b_1 \neq a_{11}$.
- O número b também é diferente de x_2, pois $b_2 \neq a_{22}$,
- Para cada n, o número b é diferente de x_n, pois $b_n \neq a_{nn}$.

Mas isso contradiz o fato de $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ser uma enumeração de $[0, 1]$, já que encontramos um número $b \in [0, 1]$ que não estava nessa lista!
Essa contradição nos permite concluir que <u>não existe</u> função bijetora $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Logo, o intervalo $[0, 1]$ é infinito não enumerável.

Uma observação sobre a demonstração de que $[0,1]$ é enumerável

A escolha dos algarismos 5 ou 6 na definição das casas decimais de b foi "quase" arbitrária.
Em vez de 5 e 6, poderíamos ter escolhido outros: 1, 2, ... Mas não quaisquer!
Qual o cuidado que tivemos que tomar?
Precisamos evitar que acontecesse de, para algum n, x_n ser, por exemplo,

$$x_n = 0{,}479999\ldots$$

e definirmos

$$b = 0{,}48000\ldots$$

Pois, se isso ocorresse, teríamos $b = x_n$ e não chegaríamos a um absurdo.
Assim, na escolha das casas decimais de b, devemos evitar o algarismo 0.

Algumas consequências

Corolário 1

O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é infinito não enumerável.

Corolário 2

O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é infinito não enumerável.

Exercícios

1. Sejam A um conjunto finito e B um conjunto enumerável tais que $A \cap B = \varnothing$. Construa uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A \cup B$.
2. Sejam A um conjunto finito e B um conjunto enumerável. Construa uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A \cup B$.
3. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se F e G são conjuntos enumeráveis então $F \cup G$ é enumerável.