ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA “LUIZ DE QUEIROZ”

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE SISTEMAS AGRÍCOLAS

LEB 5024 – HIDRÁULICA APLICADA

4ª Aula – Hidrodinâmica – Escoamento nos Condutos Forçados

1) Considerações

a) <u>Conduto forçado</u>: é aquele em que o líquido escoa com pressão diferente da pressão atmosférica, e totalmente cheio.

b) <u>Conduto livre</u>: é aquele em que o líquido escoa com pressão igual à pressão atmosférica em qualquer ponto de sua superfície livre (conduto parcialmente cheio).

2) Tipos de fluxo em condutos forçados

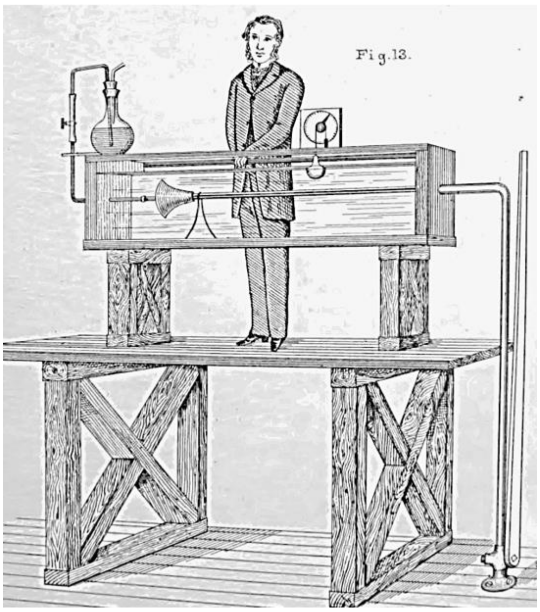
2.1. Estudos antecedentes

Perda de carga em condutos forçados.

Gotthilf Heinrich Ludwig **HAGEN** (Prússia, 1830): hf α V

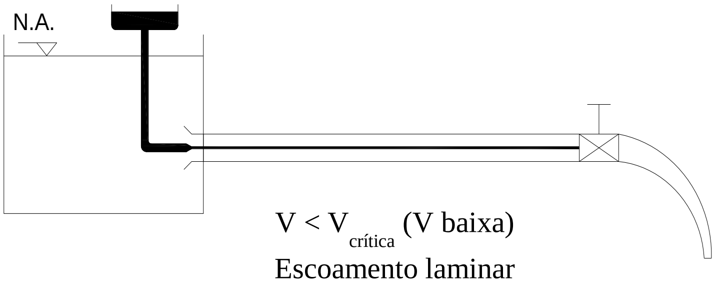
Jean-Louis-Marie **POISEUILLE** (França, 1840): hf α V^n; $n \approx 2$

2.2. Experiência de Reynolds (Irlanda do Norte e Inglaterra, 1883)



- Tubulação transparente (vidro) com líquido em escoamento.
- Regulagem de vazão do líquido (válvula).
- Escoamento em movimento permanente uniforme, em várias velocidades.
- Recipiente com líquido indicador (escuro).

a) Resultados:

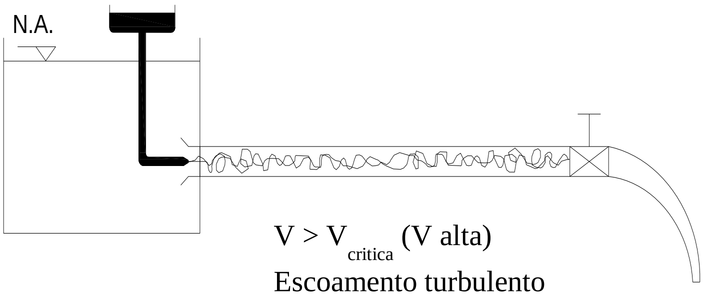


Corante em fluxo retilíneo

Movimento ordenado

Não se mistura ao líquido

Trajetórias das partículas:



Corante se mistura ao líquido

Movimento desordenado

Trajetórias das partículas: desordenadas

b) Conclusões:

- Diâmetro: D $\downarrow$ $\Rightarrow$ $\downarrow$ Turbulência

  D $\uparrow$ $\Rightarrow$ $\uparrow$ Turbulência

- Viscosidade cinemática (ν, "ni"):

  $\nu \uparrow$ $\Rightarrow$ $\downarrow$ Turbulência

  $\nu \downarrow$ $\Rightarrow$ $\uparrow$ Turbulência

A mudança de regime de escoamento ocorria a uma certa velocidade, à qual Reynolds denominou "velocidade crítica" ($V_{crítica}$), a partir da qual o escoamento deixa de ser laminar e tende a turbulento.

Experimentalmente foi determinado que $V_{crítica}$ é proporcional à viscosidade cinemática (n) e inversamente proporcional ao diâmetro do tubo (D):

$$V_{crítica} = K\,\frac{\nu}{D}$$

$$K = \frac{V_{crítica}\ D}{\nu} = 2300$$

O coeficiente de proporcionalidade (K) é o mesmo para todos os gases e líquidos, e para qualquer diâmetro de tubo. Em homenagem ao descobridor, esse coeficiente recebeu o nome de Número de Reynolds.

- K = Re (Número de Reynolds)

$$Re = \frac{V\ D}{\nu}$$

Em que:

V – velocidade de escoamento, m s^{-1}
D – diâmetro do conduto, m
ν – viscosidade cinemática do líquido, $m^2\, s^{-1}$

Escoamento:	
Re < 2300:	Laminar
2300 ≤ Re ≤ 4000:	Crítico
Re > 4000:	Turbulento

Obs.: Em condições especiais (laboratório) já se obteve escoamento laminar com Re ≈ 100000.

O Número de Reynolds representa uma relação entre as forças de inércia e de viscosidade, conforme a demonstração a seguir:

$$Re = \frac{V\ D}{\nu} \qquad (1)$$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \qquad (2)$$

(2) em (1):

$$Re = \frac{\rho\, V\ D}{\mu}$$

Força de inércia (atrito externo): $F_{\mathrm{A}} = m\, a \qquad \rho = \frac{m}{Vol} \Rightarrow \quad m = \rho\, Vol \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{I}} = \rho\, Vol\, a$

Força de viscosidade (atrito interno): $F_{\mu} = \mu\, \frac{dV}{dz}\, A$

Análise dimensional:

$$\frac{F_A}{F_\mu} = \frac{\rho \cdot Vol\ \cdot\ a}{\mu\ \cdot \frac{dV}{dz}\ \cdot\ A} = \frac{\rho\ \cdot\ L^3 \cdot\ L\, T^{-2}}{\mu\ \cdot\ L\, T^{-1}\, L^{-1}\ \cdot\ L^2} = \frac{\rho\ \cdot\ L^3 \cdot\ L\, T^{-2}}{\mu \cdot L^3\, L^{-1}\, T^{-1}} = \frac{\rho}{\mu} \cdot L\, T^{-1} \cdot L = \frac{L\, T^{-1} \cdot L}{\nu}$$

$$\frac{F_I}{F_\mu} = \frac{V \cdot D}{\nu} \qquad \therefore \qquad \frac{F_I}{F_\mu} = Re$$

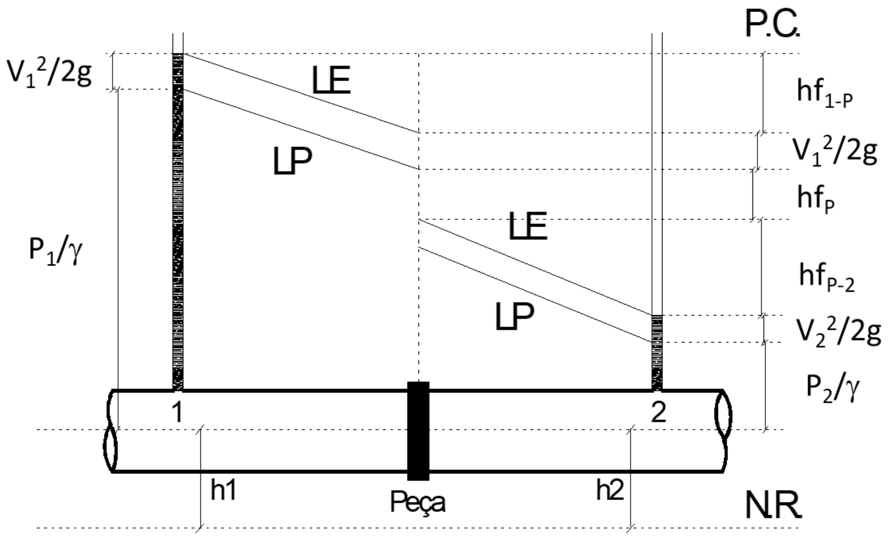
3) Perda de carga (hf)

3.1. Conceitos:

- Teorema de Bernoulli: soma das energias de pressão (P/g), cinética (V2/2g) e potencial (z) não se igualam ao longo do escoamento.
- Há perda de energia, denominada perda de carga (hf). A energia perdida é transformada em calor.
- Movimento laminar: hf devido à viscosidade (atrito interno).
- Movimento turbulento: hf devido à viscosidade e à inércia (atrito externo).

3.2. Classificação das perdas de carga:

- Distribuída (hf): devido ao movimento da água ao longo do conduto.
- Localizada (hf_L): devido a peças especiais e demais singularidades no conduto.



hf_{1-P} – perda de carga no tubo (do ponto 1 até a peça) (hf distribuída)
hf_P – perda de carga na peça (hf localizada)
hf_{P-2} – perda de carga no tubo (da peça até o ponto 2) (hf distribuída)

4) Perda de carga distribuída:

Resultados experimentais demonstraram que hf é:

- Diretamente proporcional ao comprimento da tubulação (L);
- Inversamente proporcional a uma potência do diâmetro (D^n);
- Proporcional a uma potência da velocidade (V^m);
- Independente da posição da tubulação e da pressão do escoamento;
- Dependente das asperezas da parede do conduto (em regime turbulento).

Forma geral das fórmulas de perda de carga distribuída:

$$\mathrm{hf} = \mathrm{K}\ \frac{L\,V^m}{D^n}$$

Em que:

K – coeficiente que representa as asperezas do conduto.

L – comprimento do conduto.

V – velocidade de escoamento

D – diâmetro do conduto

4.1. Fórmula Universal (Darcy-Weisbach)

a) Autores:

- **Julies Weisbach** (Saxônia – Alemanha, 1845) e **Henry D'Arcy** (França, 1857)

- Colaboradores: Chézy, **Weisbach, Darcy**, Poiseuille, Reynolds, Fanning, Blasius, Kármaán, Prandtl, Colebrook, White, Rouse, Nikuradse, Mo

- Fórmula semi-empírica: base na física teórica + experimentação em laboratório

b) Aplicação:

- Qualquer material de canalização
- Qualquer líquido
- Qualquer temperatura do líquido
- Qualquer diâmetro
- Regime de escoamento laminar ou turbulento

4.1.1. Desenvolvimento teórico

Obtida com a aplicação da análise dimensional no problema do escoamento de fluidos.

Exemplo: Estabelecer uma equação para determinação da distância percorrida (S) por um corpo em queda livre no tempo T, considerando que possivelmente tal distância depende do peso do corpo (P), da aceleração da gravidade (g) e do tempo de percurso (T).

Quadro de análise dimensional

Variáveis envolvidas	Dimensão (FLT)
Distância (S)	L
Peso (P)	F
Tempo (t)	T
Aceleração (g)	$L\,T^{-2}$

$S = f(P, g, t)$

$S = K\, P^a\, g^b\, t^c$

$F^0\, L^1\, T^0 = K\, F^a\, (L\, T^{-2})^b\, T^c$

$F^0\, L^1\, T^0 = K\, F^a\, L^b\, T^{-2b}\, T^c$

$F^0 = F^a$ $\quad$ $L^1 = L^b$ $\quad$ $T^0 = T^{-2b+c}$

a =0 $\quad$ b = 1 $\quad$ - 2b + c = 0

c = 2b $\Rightarrow$ c = 2

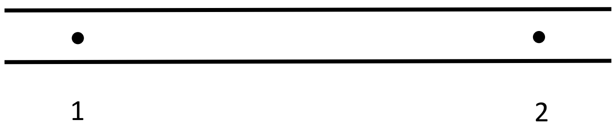
$S = K\, P^0\, g^1\, t^2 \qquad \Rightarrow \qquad S = K\, g\, t^2$

Conclusão: a distância percorrida em queda livre independe do peso do corpo, é diretamente proporcional à aceleração da gravidade e proporcional ao quadrado do tempo.

O coeficiente K deve ser determinado experimentalmente.

Análise dimensional – Fórmula Universal

Considerando um tubo em posição horizontal, com diâmetro uniforme e sob escoamento permanente, ao qual será aplicada a análise dimensional para encontrar uma expressão que permita determinar a perda de carga.



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + hf_{1-2}$$

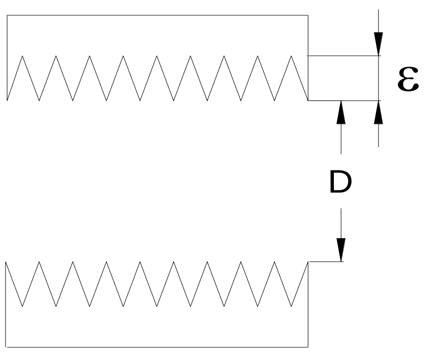
$V_1 = V_2$ $\qquad$ $z_1 = z_2$

$$hf_{1-2} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$

Por experiência prática sabe-se que as variáveis que influem na perda de carga são:

- Diâmetro do tubo (D)
- Comprimento do tubo (L)
- Rugosidade do material do tubo (K)
- Velocidade de escoamento (V)
- Viscosidade do fluido (μ)
- Massa específica do tubo (ρ)

Nos problemas de perda de carga trabalha-se com a rugosidade relativa, que é a razão entre a rugosidade do material (ε) e o diâmetro da tubulação (D). A rugosidade relativa (ε/D) pode ser substituída pela rugosidade equivalente (K/D), que é obtida com grãos de areia colados à parede de uma tubulação e causa a mesma perda de carga que a rugosidade da tubulação original.



ε/D = rugosidade relativa

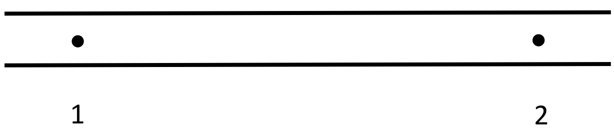
K/D = rugosidade equivalente (grãos de areia)

K – aspereza determinada com partículas de areia de tamanho conhecido

Quadro de análise dimensional

Variáveis envolvidas	Dimensão (FLT)
Diâmetro (D)	L
Viscosidade (μ)	$F \cdot L^{-2} \cdot T$
Massa específica (ρ)	$F \cdot L^{-4} \cdot T^{2}$
Comprimento (L)	L
Pressão (P)	$F\ L^{-2}$
Velocidade (V)	$L\ T^{-1}$
Rugosidade relativa (ε/D)	$L \cdot L^{-1}$

Perda de carga = diferença de pressão entre 2 pontos de uma tubulação



$$P_2 - P_1 = f(D, \mu, \rho, L, V, \varepsilon/D)$$

$$P_2 - P_1 = C \cdot D^{a} \cdot \mu^{b} \cdot \rho^{c} \cdot L^{d} \cdot V^{e} \cdot (\varepsilon/D)^{f}$$

$$F^1\ L^{-2}\ T^0 = (F^0\ L^1\ T^0)^a \cdot (F^1\ L^{-2}\ T^1)^b \cdot (F^1\ L^{-4}\ T^2)^c \cdot (F^0\ L^1\ T^o)^d \cdot (F^0\ L^1\ T^{-1})^e \cdot (F^0\ L^1\ L^{-1}\ T^0)^f$$

$$F^1\ L^{-2}\ T^0 = L^a \cdot F^b\ L^{-2b}\ T^b \cdot F^c\ L^{-4c}\ T^{2c} \cdot L^d \cdot L^e\ T^{-e} \cdot\ L^f \cdot\ L^{-f}$$

A partir de dados experimentais sabe-se que a perda de carga é diretamente proporcional ao comprimento, portanto, o expoente do comprimento é unitário (d = 1).

Agrupando termos semelhantes e fazendo d=1:

$$F^1\ L^{-2}\ T^0 = F^{b+c} \cdot L^{a-2b-4c+d+e+f-f} \cdot T^{b+2c-e}$$

$$F^1\ L^{-2}\ T^0 = F^{b+c} \cdot L^{a-2b-4c+1+e+f-f} \cdot T^{b+2c-e}$$

Separando os coeficientes de cada termo (F, L, T):

$1 = b + c$ (1)

$-2 = a - 2b - 4c + 1 + e + f - f$ (2)

$0 = b + 2c - e$ (3)

$b = e - 2c$ (4)

(4) em (1): $1 = e - 2c + c \quad \Rightarrow \quad -c = 1 - e$

$\therefore \quad c = e - 1 \qquad (5)$

(4) e (5) em (2): $-2 = a - 2b - 4c + 1 + e + f - f$

$-2 = a - 2(e - 2c) - 4c + 1 + e$

$-2 = a - 2(e - 2(e - 1)) - 4(e - 1) + 1 + e$

$-2 = a - 2e + 4e - 4 - 4e + 4 + 1 + e$

$-2 + 4 - 4 - 1 = a + e(-2 + 4 - 4 + 1)$

$3 = a - e$

$\Rightarrow \quad a = e - 3 \qquad (6)$

(5) em (4): $b = e - 2c \quad \Rightarrow \quad b = e - 2(e - 1)$

$b = e - 2e + 2$

$b = 2 - e \qquad (7)$

Resumo:

$a = e - 3$; $b = 2 - e$; $c = e - 1$; $d = 1$

Aplicando à fórmula de perda de carga:

$$\mathrm{P_2} - \mathrm{P_1} = \mathrm{C} \cdot D^{e-3} \cdot \mu^{2-e} \cdot \rho^{e-1} \cdot \mathrm{L}^1 \cdot \mathrm{V}^e \cdot (\varepsilon/\mathrm{D})^f$$

$$\mathrm{P_2} - \mathrm{P_1} = \mathrm{C} \cdot (\varepsilon/\mathrm{D})^f \cdot \mathrm{L} \cdot D^{e-3} \cdot \mathrm{V}^e \cdot \rho^{e-1} \cdot \mu^{2-e}$$

$\gamma = \rho\, g \qquad \Rightarrow$ Dividindo ambos os termos por "γ" ou "$\rho\, g$":

$$\frac{\mathrm{P_2} - \mathrm{P_1}}{\gamma} = \mathrm{C} \cdot (\varepsilon/\mathrm{D})^f \cdot \mathrm{L} \cdot D^{e-3} \cdot \frac{\mathrm{V}^e \cdot \rho^{e-1} \cdot \mu^{2-e}}{\rho\, g}$$

Obs.: $\frac{\mathrm{P_2} - \mathrm{P_1}}{\gamma} = \mathrm{hf}$

Rearranjando os termos para obter o expoente "e – 2":

Isolando "D^{-1}" e multiplicando e dividindo por V^2:

$$hf = \mathrm{C} \cdot (\varepsilon/\mathrm{D})^f \cdot \mathrm{L} \cdot \boldsymbol{D^{-1}} \cdot D^{e-2} \cdot \frac{\mathbf{V^2}\, \mathrm{V}^{e-\mathbf{2}} \cdot \rho^{e-2}}{\mu^{e-2} \cdot g}$$

$$hf = \mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^f \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{g} \cdot \left(\frac{D^{e-2} \cdot \mathrm{V}^{e-2} \cdot \rho^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right)$$

Multiplicando e dividindo por 2:

$$hf = \mathbf{2}\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{\mathbf{2}g} \cdot \left(\frac{D^{e-2} \cdot \mathrm{V}^{e-2} \cdot \rho^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right)$$

$$hf = \mathbf{2}\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{\mathbf{2}g} \cdot \left(\frac{D^{e-2} \cdot \mathrm{V}^{e-2} \cdot \rho^{e-2}}{\mu^{e-2}}\right)$$

$$hf = \left[2\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} \left(\frac{D \cdot \mathrm{V} \cdot \rho}{\mu}\right)^{e-2}\right] \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} \cdot \frac{\mathrm{V}^2}{\mathbf{2}g}$$

Fator de atrito: $\qquad f = \left[2\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} \left(\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{D} \cdot \rho}{\mu}\right)^{e-2}\right]$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad f = \left[2\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} \left(\frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{D}}{\nu}\right)^{e-2}\right]$$

$$Re = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{D}}{\nu} \qquad \Rightarrow \qquad f = \left[2\,\mathrm{C} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)^{f} Re^{e-2}\right]$$

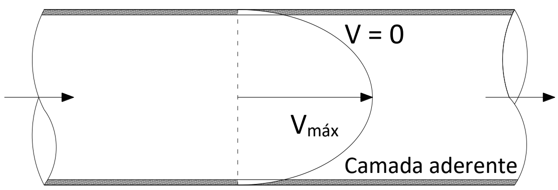
$$f = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}\right)$$

Obs.: Como o fator de atrito (f) não pode ser determinado diretamente, a Fórmula Universal é semi-empírica.

4.2. Determinação do fator de atrito (f) da Fórmula Universal

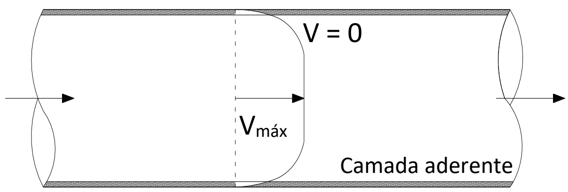
4.2.1. Considerações

a) Distribuição de velocidade no escoamento:



Escoamento laminar

$V_{max} = 2\ V_m$



Escoamento turbulento

$V_{max} = 1{,}1$ a $1{,}25\ V_m$

- $V_{máx}$ no centro e redução à medida em que se aproxima das paredes do tubo.

b) <u>Escoamento em regime laminar (Re < 2000)</u>:

- A perda de carga se deve à viscosidade (atrito interno) $\rightarrow$ f = f(Re).
- Camada aderente: camada junto à parede do tubo, que cobre todas as saliências (asperezas) das paredes do tubo.

c) <u>Escoamento em regime de transição (2000 ≤ Re ≤ 4000)</u>:

- Também denominado Escoamento em Zona Crítica.
- Compreendido entre os regimes laminar e turbulento.
- O escoamento é indefinido, pois tanto o fator f quanto a perda de carga são indefinidos.

d) <u>Escoamento em regime turbulento</u>: a perda de carga se deve à viscosidade (atrito interno) e à inércia (atrito externo).

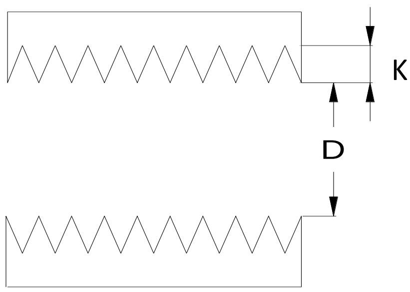
- Regime turbulento: a camada aderente está presente, mas pode, ou não, cobrir as saliências das paredes do tubo.

- Regime Turbulento Liso: camada aderente cobre as saliências $\rightarrow$ f = f(Re).
- Regime Turbulento de Transição: camada aderente não cobre saliências $\rightarrow$ f = f(Re, ε/D)
- Regime Turbulento Rugoso: camada aderente não cobre saliências $\rightarrow$ f = f(ε/D)

Sub-carga viscosa (δ):

- Utilizada na distinção entre escoamentos turbulentos (liso e rugoso).

$$\delta = 32{,}81\ \frac{\nu}{\sqrt{f}}$$



$K/\delta < 0{,}43$ $\rightarrow$ Turbulento Liso

$K/\delta \geq 6$ $\rightarrow$ Turbulento Rugoso

$0{,}43 \leq K/\delta < 6$ $\rightarrow$ Transição Liso-Rugoso

4.2.2. Determinação do Fator f – Método Gráfico

a) <u>Diagrama de Moody</u>:

- Representação gráfica das variações de atrito (f) em função da rugosidade relativa (ε/D) e do Número de Reynolds (Re) (Figura 1).

Há 3 zonas distintas:

- Re < 2000: Regime laminar. O Fator f é representado por uma reta e depende apenas do Número de Reynolds.
- 2000 ≤ Re ≤ 4000: Regime de transição (crítico). Fator f e tipo de escoamento indefinidos.
- Re > 4000: Regime Turbulento.

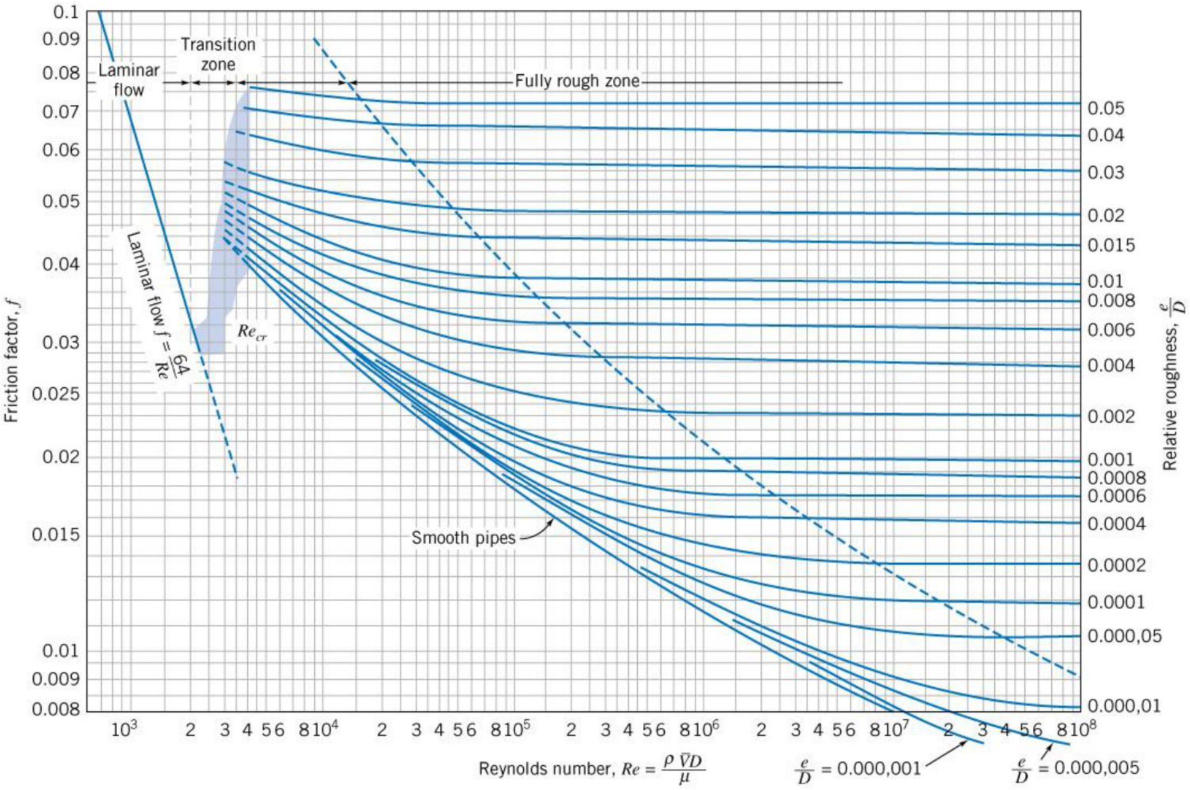


Figura 1 - Diagrama de Moody, utilizado na determinação do fator f em função de ε/D e Re.

4.2.3. Determinação do Fator f – Equações

a) Regime laminar: Fator f = f(Re)

Equação de Hagen-Poiseuille: $$f = \frac{64}{Re}$$

b) **Regime Turbulento Liso**: Fator f = f(Re)

Equação de Blasius: $$f = 0{,}316\, Re^{-0{,}25}$$

c) Regime Turbulento de Transição:

Equação de Colebrook-White: $$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}} + 0{,}27\ \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

d) Regime Turbulento Rugoso:

Equação de Nikuradse: $$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}74 - 2\log\left(2\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

4.2.3.1. Problemas hidraulicamente determinados

Incógnita	Dados
hf	Q, L, D, ν, K
V, Q	hf, L, D, ν, K
D	hf, L, Q, ν, K

a) Método de Newton-Raphson para solução de equações

- Equação de Colebrook-White:

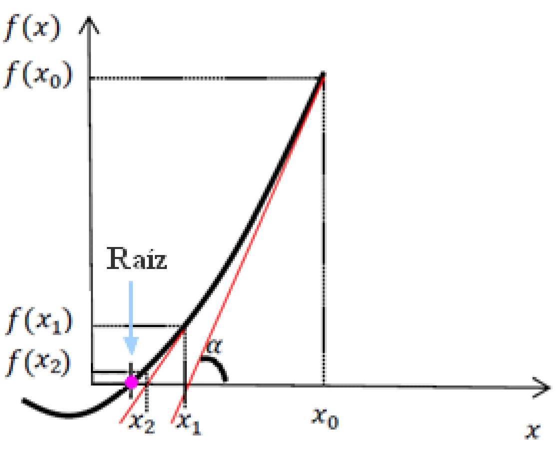
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Solução:

- Tentativas: Demorado e impreciso (Planilhas eletrônicas facilitam).

- Newton-Raphson: aproximação rápida por cálculo diferencial.

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO – NEWTON-RAPHSON



f(x): função original

f´(x): derivada da função (tangente à curva no ponto x)

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Exemplo: Solução de equação do segundo grau

Aplicação do método de Newton-Raphson à equação de Colebrook-White

Desenvolvimento teórico

$f(x) = x^2 + 3x - 12$

$f'(x) = 2\,x + 3$

Passo 1: estipular valor inicial para x.

$x_1 = 1$

Passo 2: calcular $f(x_1)$ e $f'(x_1)$:

$f(x) = 1^2 + 3 \times 1 - 12 = -8$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = 2 \times 1 + 3 = 5$

Passo 3: calcular o próximo valor de x.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_2)} = 1 - \frac{(-8)}{5} = 2{,}6$$

Passo 4: verificar se $x_2 = x_1$

Se $x_2 = x_1$ $\Rightarrow$ Fim (Resposta obtida)

Se $x_2 \neq x_1$ $\Rightarrow$ Repetir os passos 1 a 4

x_1	x_2
1,000	2,600
2,600	2,288
2,288	2,275
2,275	2,275

Resposta: x = 2,275

b) Aplicação do Método de Newton-Raphson aos problemas hidraulicamente determinados:

Método aplicado à solução da Equação de Colebrook-White.

Equação de Colebrook-White: $$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (2)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3)$$

(2) em (1):

$$\mathrm{x} = -2\log\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\,\mathrm{D}} + \frac{2{,}51\,\mathrm{x}}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} + 2\log\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\,\mathrm{D}} + \frac{2{,}51\,\mathrm{x}}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 1 + \frac{2\log \mathrm{e}\cdot\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}}}{\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\,\mathrm{D}} + \frac{2{,}51\,\mathrm{x}}{\mathrm{Re}}\right)}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 1 + \frac{5{,}02}{\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\,\mathrm{D}}\mathrm{Re} + 2{,}51\,\mathrm{x}\right)\cdot \ln 10}$$

Obs.: Regras de derivação

$f(x) = u + v$ $\qquad$ $f(x) = k\log u$

$f'(x) = u' + v'$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{k\ \log \mathrm{e}\ u'}{u}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left[\mathrm{x}+2\log\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\,\mathrm{D}}+\frac{2{,}51\,\mathrm{x}}{\mathrm{Re}}\right)\right]}{\left[1+\frac{5{,}02}{\left(\frac{K}{3{,}7\,D}\mathrm{Re} + 2{,}51\,\mathrm{x}\right)\cdot\ln 10}\right]}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{x^2}$$

c) Exemplos – Problemas Hidraulicamente Determinados

CASO 1:

Dados: Q, L, D, ν, K

Incógnita: hf

Dados:

L = 1000 m
D = 0,2 m
K = ε = 10^{-4} m
Água a 20ºC
ν = 10^{-6} m^2 s^{-1}
Q = 0,0628 m^3 s^{-1}

Pede-se: Calcular a perda de carga e identificar o regime de escoamento.

Solução:

$$V = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0628}{\pi\;\;0{,}2^2} = 2{,}0 \text{ m s}^{-1}$$

$$Re = \frac{2{,}0 \cdot 0{,}2}{10^{-6}} = 4 \times 10^5$$

$$\frac{K}{D} = \frac{10^{-4}}{0{,}2} = 5 \times 10^{-4} \text{ m m}^{-1}$$

Cálculo de f: Newton-Raphson

x_1	x_2
1,000	7,450
7,450	7,479
7,479	7,479
7,479	7,479

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left[\mathrm{x} + 2\log\left(\frac{\mathrm{K}}{3{,}7\ \mathrm{D}} + \frac{2{,}51\ \mathrm{x}}{\mathrm{Re}}\right)\right]}{\left[1 + \frac{5{,}02}{\left(\frac{K}{3{,}7\,D}\ \mathrm{Re}\ +\ 2{,}51\ \mathrm{x}\right)\cdot \ln 10}\right]}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{f}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{x^2}$$

$$f = \frac{1}{7{,}479^2} = 0{,}0179$$

Perda de carga:

$$hf = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2\,g} = 0{,}0179 \cdot \frac{1000}{0{,}2} \cdot \frac{2{,}0^2}{2 \cdot 9{,}81}$$

hf = 18,2 mca

Tipo de escoamento:

Carga viscosa: $\delta = 32{,}81\,\frac{\nu}{\sqrt{f}} = 32{,}81\,\frac{10^{-6}}{\sqrt{0{,}0179}}$ $\qquad \delta = 0{,}000123\text{ m}$

$\frac{K}{\delta} = \frac{10^{-4}}{0{,}000123} = 0{,}815$ $\qquad$ Regime turbulento de transição.

CASO 2:

Dados: hf, L, D, ν, K

Incógnita: V ou Q

Solução teórica:

$$hf = f\ \frac{L}{D}\ \frac{V^2}{2g} \qquad J = f\ \frac{1}{D}\ \frac{V^2}{2g} \qquad V = \frac{\sqrt{2g\ D\ J}}{\sqrt{f}}$$

$$V\sqrt{f} = \sqrt{2g\ D\ J}$$

Multiplicando por $\frac{D}{\nu}$:

$$\frac{V\ D}{\nu}\sqrt{f} = \frac{D}{\nu}\sqrt{2g\ D\ J}$$

$$Re\sqrt{f} = \frac{D}{\nu}\sqrt{2g\ D\ J} \qquad (1)$$

Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\ D} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \qquad (2)$$

Passos:

- Calcular $Re\sqrt{f}$ (Eq. 1);
- Calcular f (Eq. 2);
- Calcular Q ou V (Eq. da Continuidade)

Dados:

D = 0,1 m
K = ε = 2,5 x 10^{-4} m
Água a 37ºC
ν = 7 x 10^{-6} $m^2\ s^{-1}$
J = 0,0115 m m^{-1}

Pede-se a vazão (Q).

Solução:

$$Re\sqrt{f} = \frac{0{,}1}{7\cdot 10^{-6}}\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0115}$$

$$Re\sqrt{f} = 21458{,}6$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{2{,}5\cdot 10^{-4}}{3{,}7\cdot 0{,}1} + \frac{2{,}51}{21458{,}6}\right)$$

$$f = 0{,}026$$

Velocidade de escoamento:

$$V\sqrt{f} = \sqrt{2g\ D\ J} \qquad V = \frac{\sqrt{2g\ D\ J}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0115}}{\sqrt{0{,}026}}$$

V = 0,932 m s^{-1}

Vazão:

$$Q = \frac{\pi\ D^2}{4}\cdot V = \frac{\pi\ 0{,}1^2}{4}\cdot 0{,}932$$

Q = 0,0073 $m^3\ s^{-1}$ ou 7,3 L s^{-1}

Tipo de escoamento:

$$\delta = 32{,}81\ \frac{\nu}{\sqrt{f}} = 32{,}81\ \frac{7\cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}026}} \qquad \delta = 0{,}000153\ \text{m}$$

$$\frac{K}{\delta} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-4}}{0{,}000153} = 1{,}636$$

Regime turbulento de transição.

CASO 3:

Dados: hf, Q, L, ν, K

Incógnita: D

Solução teórica:

$$hf = f\ \frac{L}{D}\ \frac{V^2}{2\,g}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{L}{hf}\ \frac{1}{D}\ \frac{V^2}{2\,g} \qquad (1)$$

$$\mathrm{V} = \frac{4\ \mathrm{Q}}{\pi\ \mathrm{D}^2} \qquad (2)$$

$$\mathrm{V}^2 = \frac{16\ \mathrm{Q}^2}{\pi^2\ \mathrm{D}^4} \qquad (3)$$

(3) em (1):

$$\frac{1}{f} = \frac{L}{hf}\ \frac{1}{D}\ \frac{16\ \mathrm{Q}^2}{2g\ \pi^2\ \mathrm{D}^4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{L}{hf}\ \frac{1}{D}\ \frac{8\ \mathrm{Q}^2}{g\ \pi^2\ \mathrm{D}^4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{L}{hf}\ \frac{8\ \mathrm{Q}^2}{g\ \pi^2\ \mathrm{D}^5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = \sqrt{\frac{L}{hf}}\ \sqrt{\frac{8\ \mathrm{Q}^2}{g\ \pi^2\ \mathrm{D}^5}} \qquad (4)$$

$$\mathrm{J} = \frac{\mathrm{hf}}{\mathrm{L}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{J}} = \frac{\mathrm{hf}}{\mathrm{L}} \qquad (5)$$

(5) em (4):

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = \frac{Q}{\sqrt{\frac{g\ \pi^2}{8}\ \mathrm{J}\ \mathrm{D}^5}} \qquad (6)$$

$$Re\ \sqrt{f} = \frac{D}{\nu}\sqrt{2g\ D\ J} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\ D} + \frac{2{,}51}{Re\ \sqrt{f}}\right) \qquad (8)$$

(6) e (7) em (8):

$$\frac{Q}{\sqrt{\frac{g\ \pi^2}{8}\ \mathrm{J}\ \mathrm{D}^5}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\ D} + \frac{2{,}51}{\frac{D}{\nu}\sqrt{2g\ D\ J}}\right)$$

$$\frac{Q}{\sqrt{\frac{g\ \pi^2}{8}\ \mathrm{J}\ \mathrm{D}^5}} = -2\log\left(\frac{K}{3{,}7\ D} + \frac{2{,}51\ \nu}{\sqrt{2g\ D^3\ J}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\right)^5 = \frac{-2\sqrt{\frac{g\,\pi^2}{8}J}}{Q} log\left[\frac{K}{3{,}7}\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\right)^2 + \frac{2{,}51\,\nu}{\sqrt{2g\,J}}\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\right)^3\right] \qquad (9)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{D}} \qquad (10)$$

$$p = \frac{-2\sqrt{\frac{g\,\pi^2}{8}J}}{Q} \qquad (11)$$

$$q = \frac{K}{3{,}7} \qquad (12)$$

$$r = \frac{2{,}51\,\nu}{\sqrt{2g\,J}} \qquad (13)$$

(10), (11), (12) e (13) em (9):

$$x^5 = -p\ \log(q\,x^2 + r\,x^3) \qquad (14)$$

$$f(x) = x^5 + p\ \log(q\,x^2 + r\,x^3)$$

$$f'^{(x)} = 5\,x^4 + p\ \log\ e \cdot \frac{(2\,q\,x + 3\,r\,x^2)}{(q\,x^2 + r\,x^3)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Obs.: Regras de derivação	
$y = v + u$	$y = k \log u$
$y' = v' + u'$	$y' = \frac{k \log e \cdot u'}{u}$

Passos para a solução:

a) Calcular “p”, “q” e “r” pelas equações (11), (12) e (13).

b) Definir f(x) e f’(x), e aplicar o método de Newton-Raphson para encontrar “x”.

c) Calcular D: $x = \frac{1}{\sqrt{D}}$ $D = \frac{1}{x^2}$

Exemplo: Dimensionar uma tubulação com escoamento por gravidade a partir dos dados a seguir.

L = 1000 m
Δz = 20 m
K = ε = 10^{-4} m
Água a 20°C
ν = 10^{-6} $m^2 s^{-1}$
Q = 0,065 $m^3 s^{-1}$

x_1	f(x)	f'(x)	x_2
2,2172	-3,22E+00	1,27E+02	2,2424
2,2424	6,94E-02	1,33E+02	2,2419
2,2419	3,03E-05	1,33E+02	2,2419

Solução:

$$J = \frac{hf}{L} = \frac{20}{1000} = 0{,}02 \text{ m/m}$$

$$p = \frac{-2\sqrt{\frac{g\,\pi^2}{8}J}}{Q} = \frac{-2\sqrt{\frac{9{,}81\,\pi^2}{8}0{,}02}}{0{,}065} = 15{,}1380878$$

$$q = \frac{K}{3{,}7} = \frac{10^{-4}}{3{,}7} = 0{,}000027027$$

$$r = \frac{2{,}51\,\nu}{\sqrt{2g\,J}} = \frac{2{,}51 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}02}} = 0{,}000004047$$

$$D = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2{,}2419^2} = 0{,}199 \text{ m ou } 199 \text{ mm}$$

V = 2,09 m/s