→ Critério ~~de~~ M de Weierstrass.

Weierstrass estabeleceu um critério para provar que algumas séries são uniformemente convergentes. Podemos aplicar o critério sempre que a série dada possa ser dominada por uma série numérica (convergente) de términos positivos!!

Teorema. (Critério M). Seja a série de funções $\sum u_n(x)$, $x \in S$, t.q.

a) $f(x) \equiv \sum u_n(x)$, $x \in S$. (Convergência pontual)

b) Existe uma série numérica convergente $\sum M_n$, $M_n > 0$, t.q. $|u_n(x)| \leq M_n$, $\forall n \geq 1$ e $x \in S$

Então a série $\sum u_n$ converge uniformemente em S a f.

Prova: 1) a série converge absolutamente $\forall x \in S$: De fato, por comparação a relação $|u_n(x)| \leq M_n$, $n \geq 1$ e $x \in S$, fixo temos $\sum |u_n(x)| \leq \sum M_n < \infty$ ∴

2) $$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \underset{\substack{\text{Desigualdade} \\ \text{Triangular}}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

$\forall x \in S$.

3) Seja $M \equiv \sum_{k=1}^{\infty} M_k$. Então, para $S_n \equiv \underbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k}_{\text{Somas parciais}}$, sabemos que $M \equiv \lim_{n\to\infty} S_n$. Assim, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \geq N$, $|M - S_n| < \epsilon$.

Mais sabemos que $M - S_n \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$, e $M_k > 0$,

$\Rightarrow |M - S_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$.

4) Logo do item 2) e 3) temos que $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N$

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon, \quad \forall x \in S.$$

Logo a série convergente uniformemente para f sobre $\underline{\underline{S}}$.

emplos: 1) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ converge unif. para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: a) Como $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow$ a série converge uniformemente para uma função $f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. (Achar a cara da f pode ser nada fácil!!)

b) Como $\sum \frac{1}{n^2}$ é formada de termos positivos e obviamente é convergente temos que a série converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ para f.

Nota: a) Como cada termo da série é contínua $\left(f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n^2} \right)$ sobre $\mathbb{R}$ então pelo Teorema 2)

temos que f é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

lho → b) Derivando cada termo da série obtemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n}$ a qual diverge para $x = 0$!

logo a derivasão termo a termo pode destruir a convergência
ainda que a série original converge uniformemente!!

c) Em geral justificar o intercambio das operasões de derivasão e somasão é, em geral, muito mais delicado que no caso da integasão. No caso de termos séries de potência podemos SIM fazer este intercambio!!

É possivel mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ (*)
para $x \in [0, 2\pi]$ (usando séries de Fourier). Usar esta formula para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Solusão: ~~A~~ idea é integrar a solusão (*) sobre um intervalo conveniente. Para isso precisamos prover a convergência
Uniforme e usar o Teorema 4

a) Convergência uniforme: $\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2} = M_n \; \forall x \in [0, 2\pi]$ como $\sum M_n < \infty$
$\Rightarrow$ pelo critério M de Weierstrass temos que $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge uniformemente $\forall x \in [0, 2\pi]$.

b) Como cada $f_n(x) \equiv \frac{\cos(nx)}{n^2}$ é contínua sobre $[0, 2\pi]$ que no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ temos do teorema 4

$$\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}\, dx \equiv \frac{\pi^3}{32}$$

$$\| $$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n^2}\, dx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3} = \cancel{\sum_{n\,par}}^{\,0} + \sum_{n\,imp} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)}{(2k-1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \;//$$

(4)

→ Nota: Da relação (*) obtemos obviamente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

) $\forall n \geq 1$, seja $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

a) Determinar o domínio da função f t.q.
$$f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

b) A sequência f_n, $n \geq 1$, converge uniformemente a f em $[0,1)$?
E em $[0,r]$, com $0 < r < 1$?

Solução: a) Sabemos que $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Então
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x|<1 \\ \text{"não existe"} & |x| \geq 1 \end{cases}$$

logo $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$.

b) $f_n \to f$ não é uniforme sobre $[0,1)$!!. Suponha que seja uniforme.. Então para um $\epsilon > 0$ dado existe N t.q. $\forall n \geq N$ temos

$$(**) \quad |f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \epsilon \quad \forall x \in [0,1)$$

Obviamente a relação (**) não pode acontecer, pois para $x \to 1^-$ ~~e tomando~~ $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ //.

• Agora para $0 < r < 1$, se temos que $f_n \to f$ unif. sobre $[0,r]$.

Pois, $|f(x) - f_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$, $\forall x \in [0,r]$ (Note r é fixo)

e $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$!!

1) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{nx}{nx^2+1}}^{f_n(x)}$.

a) Mostre que f_n não converge unif. a f sobre $\mathbb{R}$//.

b) $\forall a>0$, f_n converge uniformemente a f sobre cada intervalo da forma $[a,b]$//.

Prova: a) Cada $f_n(x) \equiv \frac{nx}{nx^2+1}$ é contínua sobre $\mathbb{R}$.

Assim, se $f_n \to f$ unif. $\Rightarrow$ f seria contínua sobre $\mathbb{R}$

Mas
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx^2+1} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a qual seria contínua em $x=0$. Absurdo!!

b) Seja $a<x<b$. Então
$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{nx^2+1} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x(nx^2+1)} \leq \frac{1}{a(nx^2+1)}$$
$$\leq \frac{1}{anx^2} \leq \frac{1}{a^3 n}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e a expressão $\frac{1}{a^3 n}$ não depende de $x \in [a,b]$

obtemos a convergência uniforme!!

2) a) Verifique que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x^4+k^4}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que a função $S(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x^4+k^4}$ é contínua sobre $\mathbb{R}$

Prova: a) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k \geq 1$ temos $\left| \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x^4+k^4} \right| \leq \frac{1}{x^4+k^4} \leq \frac{1}{k^4}$.

Agora, a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ é convergente. Logo do

Critério M de Weierstrass temos que a série converge uniformemente à função $s(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x^4+k^4}$.

b) Sabemos que $s(x) \overset{\text{c. uniforme}}{\equiv} \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, onde as somas parciais $S_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x^4+k^4}$ são funções contínuas. Logo pelo teorema 1 temos que s é contínua sobre $\mathbb{R}$ //.

) Verifique que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e para a função $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$ temos

$$\int_0^1 s(x)\,dx \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Solução: Da relação $\frac{1}{x^2+k^2} \le \frac{1}{k^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e a convergência da série $\sum \frac{1}{k^2}$, temos pelo critério M de Weierstrass que a série converge unif. a s.
Assim, pelo teorema 3 segue-se que

$$\int_0^1 s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{x^2+k^2}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctang}\left(\frac{x}{k}\right)\Big|_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) \quad //.$$