Aula 4. Processo de Poisson. Definição. (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Distribuição de tempo entre chegadas. Capítulo 5.3.3.

Seja $N(t)$ processo de Poisson com taxa λ. Seja T_1 o tempo de ocorrência do primeiro evento, e seja T_n o intervalo de tempo entre $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo eventos, $n = 1, 2, \ldots$. (Se $T_1 = 5$ e $T_2 = 10$, então os tempos de ocorrência do primeiro evento e do segundo evento são 5 e 15, respectivamente). Prove que os T_n's são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição exponencial de taxa λ.

Provamos que $T_1 \sim \exp(\lambda)$. Para isso, notamos que o evento $\{T_1 > t\}$ ocorre se e somente se nenhum evento do processo de Poisson ocorreu durante o intervalo $[0, t]$, assim temos:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

O que prova que T_1 tem distribuição exponencial com o taxa λ.

Distribuição de tempo entre chegadas. Capítulo 5.3.3.

Para obter a distribuição de T_2, probabilidade desejada pode ser representada da seguinte forma (em termos do livro):

$$\mathbb{P}(T_2 > t) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(T_2 > t \mid T_1)).$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 > t \mid T_1 = s) &= \mathbb{P}(\text{nenhum evento ocorre em } (s, s+t] \mid T_1 = s) \\ &= \mathbb{P}(\text{nenhum evento ocorre em } (s, s+t]) = e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

em que as últimas igualdades são consequências de independência e estacionariedade dos incrementos do processo de Poisson.

$$\begin{aligned}P(T_2 > t) = E(P(T_2 > t \mid T_1)) &= \int_0^\infty P(T_2 > t \mid T_1 = s)\lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

o que significa que $T_2 \sim \exp(\lambda)$ e independente de T_1.

$\square$

Distribuição de tempo entre chegadas. Capítulo 5.3.3.

O fato que os tempos entre as ocorrências de um processo de Poisson têm a distribuição exponencial não pode nos surpreender. A suposição de que o processo possui os incrementos independentes faz o processo em cada incremento "esquecer" o passado, em outras palavras, o processo possui a propriedade de falta da memôria.

Distribuição tempos de chegadas. Capítulo 5.3.3.

A outra variável de interesse é saber quando acontece o n-ésimo evento S_n. Temos a seguinte representação para o tempo de espera $S_n : S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Sabemos que a distribuição da soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial com intensidade λ é gama com parâmetros λ e n. A densidade $f_{S_n}(t)$ desta distribuição fica dada por

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \lambda > 0.$$

Podemos derivar essa densidade pelo caminho alternativo.

Distribuição tempos de chegadas. Capítulo 5.3.3. Vamos derivar a densidade $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ de forma alternativa:

Notamos, que o evento $\{S_n \leq t\}$ significa que pelo menos n eventos ocorreram até tempo t. Assim,

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = k) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) = (F_{S_n}(t))' &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=n}^{\infty} \left(-\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 5.3.3. Exemplo 5.9.

Suponha que a chegada de imigrantes em um país forma um processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$ pessoa por um dia.

1. Qual é o tempo médio da chegada do décimo imigrante?

2. Qual é a probabilidade de que o tempo entre o nono imigrante e o décimo fique maior do que dois dias?

Solução.

1. $\mathbb{E}[S_{10}] = 10\frac{1}{\lambda} = 10$ dias;

2. $\mathbb{P}\{T_{10} > 2\} = e^{-\lambda 2} = e^{-2} = 0.133...$

$\square$

Capítulo 5.3.3. Observação.

Outro jeito de achar a densidade de S_n:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(t < S_n < t+h)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(N(t) = n-1 \text{ e um evento ocorre em } (t, t+h)\Big) + o(h)\\
&\quad = \mathbb{P}\Big(N(t) = n-1\Big)\mathbb{P}\Big(\text{um evento ocorre em } (t, t+h)\Big) + o(h)\\
&\quad = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big(\lambda h + o(h)\Big) + o(h)\\
&\quad = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}h + o(h)
\end{aligned}
$$

Capítulo 5.3.3. Outras propriedades. Consideramos um processo de Poisson com taxa λ. Suponha que em cada instante de ocorrência do evento com a probabilidade p vamos classificar o evento como o evento do tipo I, ou evento do tipo II, com probabilidade $1-p$. Por exemplo, as pessoas que entram numa loja formam um processo de Poisson com taxa λ, podemos supor que a pessoa que entra em loja pode ser um homem com a probabilidade 50% ou uma mulher com a mesma probabilidade.

Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ o número de ocorrências dos eventos do tipo I e do tipo II, respectivamente até o instante t.

Proposição 5.2. Prove que $N_1(\cdot)$ e $N_2(\cdot)$ são processos de Poisson independentes um do outro com taxas $p\lambda$ e $(1-p)\lambda$, respectivamente.

Capítulo 5.3.3. Outras propriedades. Prove que $N_1(\cdot)$ e $N_2(\cdot)$ são processos de Poisson independentes um do outro com taxas $p\lambda$ e $(1-p)\lambda$, respectivamente.

Calculamos a probabilidade de que ocorra n eventos do tipo I e m eventos do tipo II durante o tempo $[0,t]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t)=n, N_2(t)=m) &= \mathbb{P}(N_1(t)=n, N_2(t)=m, N(t)=n+m) \\
&= \mathbb{P}(N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m)\mathbb{P}(N(t)=n+m) \\
&= \mathbb{P}(N_1(t)=n, N_2(t)=m \mid N(t)=n+m)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\
&= \binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\
&= e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1(t)=n) &= \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(N_1(t)=n, N_2(t)=m) \\
&= e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Capítulo 5.3.3. Outras propriedades. Temos

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n, N_2(t) = m) = e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

$$\mathbb{P}\{N_1(t) = n\} = e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}$$

e de mesmo modo $\mathbb{P}\{N_2(t) = m\} = e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}$

As contas mostram que o $N_1(\cdot)$ forma um processo de Poisson com taxa λp enquanto $N_2(t)$ forma um processo de Poisson com taxa $(1-p)\lambda$. A independência segue direto da observação de que

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n, N_2(t) = m) = \mathbb{P}(N_1(t) = n)\mathbb{P}(N_2(t) = m).$$

$\square$

Capítulo 5.3.3. Exemplo 5.10.

Suponha que a chegada dos imigrantes em um país forma um processo de Poisson com taxa de dez pessoas por uma semana. O novo imigrante é descendente Europeu com a probabilidade 1/12. Qual é a probabilidade de que nenhum descendente Europeu chegue durante um mês (suponha que um mês tem quatro semanas).

Solução. Pelo resultado anterior chegada de descendentes europeus forma processo de Poisson com taxa $\frac{1}{12} \cdot 10$ pessoas por semana. Isso significa que o número de descendentes europeus durante 4 semanas tem distribuição de Poisson com média

$$4 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{10}{3}.$$

Então, a probabilidade desejada é $e^{-10/3}$. $\square$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.