

## PQI-5776 FENÔMENOS DE TRANSPORTE I

AULA 4 - [PARTE I DE 2]Adimensionalização

As equações de conservação estudadas nos Fenômenos de Transporte podem ser expressas na forma adimensionalizada.

Deste modo, as variáveis do escoamento e dos demais fenômenos podem ser normalizadas, com seus valores variando em limites bem definidos (p. ex. de 0 a 1). Sendo que em muitas situações é possível obter soluções confiáveis das equações, principalmente através do procedimento de "scaling".

Outra vantagem, da adimensionalização, é a expressão de parâmetros (números) adimensionais característicos, fundamentais na elaboração e generalização de correlações semi-empíricas para cálculo de coeficientes convectivos de transporte de calor e massa.

A aplicação da fluidodinâmica computacional (CFD) no estudo dos Fenômenos de Transporte também utiliza as equações na sua forma generalizada, inclusive com modelos implícitos dependentes de alguns adimensionais.

1. Continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \rho \vec{v} \quad (1)$$

Adimensionalizando-se as variáveis, tem-se:

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} ; \quad \hat{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{v_0} ; \quad \hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{L} ; \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0} \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0 \hat{\rho} ; \quad \vec{v} = v_0 \hat{\vec{v}} ; \quad \vec{r} = L \hat{\vec{r}} ; \quad t = t_0 \hat{t}$$

sendo  $\rho_0, v_0, L$  e  $t_0$  os parâmetros característicos (com valores constantes) do fenômeno em estudo.

Observa-se que os operadores **grad**, **div** e **lap** também são adimensionalizados:

$$\hat{\text{grad}} = L \text{grad} \quad ; \quad \hat{\text{div}} = L \text{div} \quad ; \quad \hat{\text{lap}} = \text{div grad} = L^2 \text{lap}$$

Substituindo-se as variáveis adimensionalizadas na equação (1), resulta:

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} = -\frac{\rho_0 v_0}{L} \hat{\text{div}} \hat{\rho} \hat{\vec{v}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{t_0 v_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} = -\hat{\text{div}} \hat{\rho} \hat{\vec{v}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\text{Sr}} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} = -\hat{\text{div}} \hat{\rho} \hat{\vec{v}}} \quad (2)$$

Definindo-se o número de Strouhal por :  $\boxed{\text{Sr} = \frac{t_0 v_0}{L}} \quad (3)$

Que pode caracterizar o tempo necessário para que se atinja a condição de regime permanente. Associa-se, também, o número de Strouhal à fenômenos de escoamento oscilatórios.

## 2. Equação de Conservação Generalizada

$$\rho \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} \varphi = -\text{div} \vec{j}_\Phi + \dot{\sigma}_{v_\Phi} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v} \varphi + \vec{j}_\Phi) = \dot{\sigma}_{v_\Phi}$$

Substituindo-se a equação constitutiva da difusão, na sua forma genérica ( $\Gamma_\varphi = \lambda_\varphi$ , símbolo anteriormente utilizado):

$$\vec{j}_\Phi = -\rho \Gamma_\varphi \text{grad} \varphi \quad (5)$$

na equação de conservação (4), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v} \varphi - \rho \Gamma_\varphi \text{grad} \varphi) &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \\ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div} \rho (\vec{v} \varphi - \Gamma_\varphi \text{grad} \varphi) &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \end{aligned} \quad (6)$$

Adimensionalizando-se as variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad ; \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v_0} \quad ; \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{L} \quad ; \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0} \quad ; \quad \hat{\varphi} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta \varphi} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_S - \varphi_0} \quad ; \Rightarrow \\ \rho = \rho_0 \hat{\rho} \quad ; \quad \vec{v} = v_0 \hat{v} \quad ; \quad \vec{r} = L \hat{r} \quad ; \quad t = t_0 \hat{t} \quad ; \quad \varphi = \hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0 \end{aligned}$$

Substituindo-se em (6), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0} \frac{\partial \rho_0 \hat{\rho} (\hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0)}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{L} \hat{\text{div}} \hat{\rho} \left( \rho_0 v_0 \hat{v} (\hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0) - \frac{\rho_0}{L} \Gamma_\varphi \text{grad} (\hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0) \right) &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \\ \frac{\rho_0}{t_0} \left[ \frac{\partial (\hat{\rho} \hat{\varphi} \Delta \varphi)}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\rho} \varphi_0}{\partial \hat{t}} \right] + \frac{\rho_0 v_0}{L} \hat{\text{div}} \hat{\rho} \left( \hat{v} (\hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0) - \frac{1}{v_0 L} \Gamma_\varphi \text{grad} (\hat{\varphi} \Delta \varphi + \varphi_0) \right) &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \\ \frac{\rho_0}{t_0} \left[ \Delta \varphi \frac{\partial (\hat{\rho} \hat{\varphi})}{\partial \hat{t}} + \varphi_0 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} \right] + \frac{\rho_0 v_0}{L} \left[ \Delta \varphi \hat{\text{div}} (\hat{\rho} \hat{v} \hat{\varphi}) + \varphi_0 \hat{\text{div}} (\hat{\rho} \hat{v}) - \hat{\text{div}} \hat{\rho} \left( \frac{\Delta \varphi}{v_0 L} \Gamma_\varphi \text{grad} \hat{\varphi} \right) \right] &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \end{aligned}$$

Reagrupando-se os termos, resulta:

$$\begin{aligned} \varphi_0 \frac{\rho_0 v_0}{L} \underbrace{\left[ \frac{L}{t_0 v_0} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \hat{\text{div}} (\hat{\rho} \hat{v}) \right]}_{=0, \text{continuidade}} + \frac{\rho_0 \Delta \varphi}{t_0} \frac{\partial (\hat{\rho} \hat{\varphi})}{\partial \hat{t}} + \frac{\rho_0 v_0 \Delta \varphi}{L} \left[ \hat{\text{div}} (\hat{\rho} \hat{v} \hat{\varphi}) - \hat{\text{div}} \hat{\rho} \left( \frac{\Gamma_\varphi}{v_0 L} \text{grad} \hat{\varphi} \right) \right] &= \dot{\sigma}_{v_\Phi} \\ \frac{L}{v_0 t_0} \frac{\partial (\hat{\rho} \hat{\varphi})}{\partial \hat{t}} + \hat{\text{div}} \hat{\rho} \left( \hat{v} \hat{\varphi} - \frac{\Gamma_\varphi}{v_0 L} \text{grad} \hat{\varphi} \right) &= \frac{\dot{\sigma}_{v_\Phi} L}{\rho_0 v_0 \Delta \varphi} \end{aligned}$$

Obtendo-se:

$$\frac{1}{\text{Sr}} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v} \hat{\phi} - \frac{1}{\text{Pe}} \text{gr} \hat{\phi} \right) = \frac{\dot{\sigma}_{v\phi} L}{\rho_0 \Delta \phi v_0} \quad (7)$$

Definindo-se o número de Peclet:

$$\text{Pe} = \frac{v_0 L}{\Gamma_\phi} = \frac{v}{\Gamma_\phi} \frac{v_0 L}{v} = \text{Re} \frac{v}{\Gamma_\phi} \quad (8)$$

Para a relação entre a difusividade  $\Gamma_\phi$  da propriedade  $\phi$  e difusividade de quantidade de movimento  $\nu$ , tem-se :

Número de Prandtl,  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$  (9)

Lembrando-se que:  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

Número de Schmidt,  $\text{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}}$  (10)

No caso de  $\text{Pe} \gg 1$ , o termo difusivo de equação (7) pode ser desprezado em relação ao convectivo, facilitando-se, assim, a resolução das equações.

Tabela 1. Propriedades de transporte e adimensionais

$\phi$	$\Gamma_\phi$	$\nu/\Gamma_\phi$
$\mathbf{v}$	$\nu$	1
$\omega_A$	$D_{AB}$	Sc
$c_p T$	$\alpha$	Pr

As equações de conservação (7) são, a rigor, aplicadas a uma única fase e a sua solução fica limitada pelas condições de contorno, definidas nas fronteiras (entradas, saídas, interfaces e/ou paredes) do volume de controle.

### 3. Equação de Energia

Para  $\phi = c_p T$ , tem-se da equação (7):

$$\frac{1}{\text{Sr}} \frac{\partial \hat{\rho} c_p T}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v} c_p \hat{T} - \frac{1}{\text{Pe}} \text{gr} c_p \hat{T} \right) = \frac{\dot{\sigma}_{vT} L}{\rho_0 \Delta T v_0} \quad (11)$$

Substituindo-se o termo de produção pela dissipação viscosa  $\dot{\sigma}_{vT} = \mu \Phi_v$ , e para  $c_p$  constante, tem-se:

$$\frac{1}{\text{Sr}} \frac{\partial \hat{\rho} T}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v} \hat{T} - \frac{1}{\text{Pe}} \text{gr} \hat{T} \right) = \frac{\mu \Phi_v L}{\rho_0 c_p \Delta T v_0}$$

Rearranjando-se o termo de produção:

$$\frac{\mu\Phi_{\nabla}L}{\rho_0 c_p \Delta T v_0} = \frac{1}{Pe} \frac{v_0 L}{\alpha} \frac{\mu\Phi_{\nabla}L}{\rho_0 c_p \Delta T v_0} = \frac{1}{Pe} \frac{\mu\Phi_{\nabla}L^2}{k \Delta T} = \frac{Br}{Pe} = \frac{Br}{Re Pr}$$

Define-se o número de Brinkman  $Br$ , que relaciona o efeito térmico da dissipação viscosa e a difusão de calor:

$$Br = \frac{\mu\Phi_{\nabla}L^2}{k \Delta T} \quad (12)$$

Resultando para o balanço de energia:

$$\boxed{\frac{1}{Sr} \frac{\partial \hat{p}T}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v}\hat{T} - \frac{1}{Pe} \text{grãd} \hat{T} \right) = \frac{Br}{Pe}} \quad (13)$$

Por exemplo, para um escoamento paralelo entre duas placas paralelas distantes  $L$ , o perfil de velocidades é linear,  $v = (v_0/L)y$ , o termo de dissipação viscosa e o número de Brinkman são expressos por:

$$\mu\Phi_{\nabla} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \mu \left( \frac{v_0}{L} \right)^2$$

$$\boxed{Br = \frac{\mu\Phi_{\nabla}L^2}{k \Delta T} = \frac{\mu v_0^2}{k \Delta T}}$$

#### 4. Navier-Stokes

Da equação de Navier-Stokes, tem-se:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grãd} \vec{v} = \rho \vec{g} - \text{grãd} p + \mu \text{lap} \vec{v} \quad (14)$$

Expressando-se a força de campo (no caso a gravidade) como derivada de um potencial  $U$ :  $\vec{f} = -\text{grãd} U = \vec{g} \Rightarrow \rho \vec{g} = -\rho \text{grãd} U$

Combinando-se os termos de pressão com o de força de campo, para densidade constante:

$$-\text{grãd} p + \rho \vec{g} = -\text{grãd} p - \text{grãd} \rho U = -\text{grãd} (p + \rho U)$$

Define-se uma pressão modificada  $P$ :

$$P = \rho U + p$$

$$\text{grãd} P = \text{grãd} (\rho U + p)$$

Substituindo-se em (14):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grãd} \vec{v} = -\text{grãd} P + \mu \text{lap} \vec{v} \quad (15)$$

Adimensionalizando-se, para  $\hat{P} = P/P_0$ :

$$\boxed{\frac{1}{Sr} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{v} \cdot \text{grad} \hat{v} = -\frac{1}{Ru} \text{grad} \hat{P} + \frac{1}{Re} \text{láp} \hat{v}} \quad (16)$$

Definindo-se o número de Ruark:  $\boxed{Ru = \frac{\rho v_0^2}{P_0}} \quad (17)$

Para alto número de Reynolds, o termo viscoso da equação (16) pode ser desconsiderado, e tem-se a equação de Euler (fluido invíscido) de importante aplicação em escoamentos externos. Por outro lado, para baixo Reynolds, o termo convectivo pode ser desconsiderado, resultando no "creeping flow", que é característico no caso de escoamento de líquidos em meios porosos e no caso de escoamento em microcanais.

### 5. Equação da Continuidade para Espécie A

Adotando-se como medida de concentração de uma espécie química (A) a fração mássica  $\omega_A$ , tem-se  $\phi = \omega_A$ . Substituindo-se na equação (7), resulta:

$$\frac{1}{Sr} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\omega}_A}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v} \hat{\omega}_A - \frac{1}{Pe} \text{grad} \hat{\omega}_A \right) = \frac{r_A L}{\rho_0 \Delta \omega_A v_0} \quad (18)$$

No caso:  $Pe = ReSc$  e  $\hat{\sigma}_{vW} = r_A$  = velocidade das reações de (produção/consumo) da espécie A.

Identifica-se o último termo como número de Damköhler1, que expressa a razão entre o tempo característico de convecção,

$$t_C = \frac{L}{v_0}, \text{ e o tempo característico de reação, } t_R = \frac{\rho_0 \Delta \omega_A}{r_A}.$$

$$\boxed{Da_1 = \text{Damköhler}_1 = \frac{r_A L}{\rho_0 \Delta \omega_A v_0} = \frac{t_C}{t_R}} \quad (19)$$

Assim, a equação de (18) pode ser expressa por:

$$\boxed{\frac{1}{Sr} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\omega}_A}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \hat{v} \hat{\omega}_A - \frac{1}{Pe} \text{grad} \hat{\omega}_A \right) = Da_1} \quad (20)$$

Uma outra forma de expressar a mesma equação é multiplicando-se a equação (18) pelo número de Peclet:

$$\frac{Pe}{Sr} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\omega}_A}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( Pe \hat{v} \hat{\omega}_A - \text{grad} \hat{\omega}_A \right) = \frac{r_A L}{\rho_0 \Delta \omega_A v_0} \frac{v_0 L}{D_{AB}} \quad (21)$$

Identifica-se o último termo como número de Damköhler2, que expressa a razão entre o tempo característico de difusão,

$$t_D = \frac{L^2}{D_{AB}}, \text{ e o tempo característico de reação, } t_R = \frac{\rho_0 \Delta \omega_A}{r_A}.$$

$$\boxed{Da_2 = \text{Damköhler}_2 = \frac{r_A L^2}{\rho_0 \Delta \omega_A D_{AB}} = \frac{t_D}{t_R}} \quad (22)$$

Em problemas de difusão/reação em poros de catalisadores define-se o adimensional denominado módulo de Thiele, que é equivalente a  $(Da_2)^{1/2}$ .

Assim, a equação de (21) pode ser expressa por:

$$\frac{Pe}{Sr} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\omega}_A}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( Pe \hat{v} \hat{\omega}_A - \text{grãd} \hat{\omega}_A \right) = Da_2 \quad (23)$$

## 6. Resolução das equações

Muitas simplificações são necessárias para a resolução das equações de conservação apresentadas, considerando-se, principalmente, o caso de escoamentos turbulentos.

Usualmente, nos cálculos de engenharia, empregam-se os coeficientes convectivos de transporte ( $h$ ,  $k$  e  $f$ ) para o cálculo dos fluxos de calor, massa e quantidade de movimento.

Tais coeficientes são definidos nas interfaces/paredes e possibilitam o cálculo do fluxo de transporte global da propriedade  $\phi$  (transporte devido ao escoamento + difusão).

Geralmente são baseados em correlações semi-empíricas, apresentadas na forma dos números adimensionais:  $f$  - fator de atrito -,  $Nu$  - Nusselt- e  $Sh$  - Sherwood.

$$\frac{1}{Sr} \frac{\partial \hat{\rho} \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} + \text{div} \hat{\rho} \left( \underbrace{\hat{v} \hat{\phi} - \frac{1}{Pe} \text{grãd} \hat{\phi}}_{\substack{\text{coeficiente convectivo} \\ \text{(escoamento+difusão)}}} \right) = \frac{\dot{\sigma}_{v_\phi} L}{\rho_0 \Delta \phi v_0} \quad (24)$$

Os adimensionais  $Nu$ , para transferência de calor, e  $Sh$ , para transporte de massa, representam os gradientes adimensionalizados das respectivas propriedades  $\phi$ 's na parede/interface:

$$\boxed{Nu = \left( \text{grãd} \hat{T} \right)_{\hat{r}=0}} \quad \boxed{f = \frac{1}{Re} \left( \text{grãd} \hat{v} \right)_{\hat{r}=0}} \quad \boxed{Sh = \left( \text{grãd} \hat{w}_i \right)_{\hat{r}=0}} \quad (25)$$

As equações adimensionalizadas (24) e (25) ilustram o porque das correlações em função dos adimensionais  $Re$ ,  $Pr$ ,  $Sc$ ,  $Pe$ ,  $Nu$ ,  $Sh$ ,  $f$  etc.. típicas de engenharia.

A analogia dos fenômenos de transporte pode ser expressa, também, a partir do número de Stanton,  $St$ , no caso de escoamentos turbulentos.

$$\boxed{St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{Re Pr}} \quad \boxed{St = \frac{Sh}{Pe} = \frac{Sh}{Re Sc}} \quad \boxed{St = \frac{f}{2}} \quad (26)$$

**Escoamento Irrotacional: Exemplo**

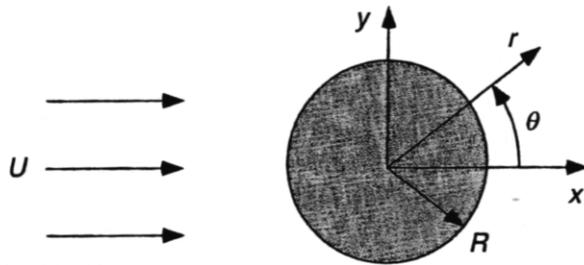
**Example 8.3-1 Flow Past a Cylinder** Consider irrotational flow past a long cylinder of radius  $R$ . As shown in Fig. 8-5, the cylinder is assumed to be aligned with the  $z$  axis, and far away there is a uniform velocity  $U$  in the  $x$  direction.

The stream function  $\psi(r, \theta)$  for this planar flow is defined by

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{8.3-1}$$

As mentioned in Section 8.2, the stream function for a planar, irrotational flow is governed by Laplace's equation, or

**Figure 8-5.** Flow past a long, circular cylinder.



$$\nabla^2 \psi = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi = 0. \tag{8.3-2}$$

The applicable boundary conditions for the velocity components are

$$v_r(R, \theta) = 0, \tag{8.3-3}$$

$$v_r(\infty, \theta) = U \cos \theta, \quad v_\theta(\infty, \theta) = -U \sin \theta. \tag{8.3-4}$$

The no-slip condition at the cylinder surface has been omitted because it cannot be satisfied, as will be shown. In terms of the stream function, the no-penetration condition becomes

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(R, \theta) = 0 \tag{8.3-5}$$

and the unperturbed velocity field is consistent with

$$\psi(\infty, \theta) \rightarrow Ur \sin \theta. \tag{8.3-6}$$

Equation (8.3-6) was obtained by using Eq. (8.3-1) in Eq. (8.3-4), integrating, and setting the respective integration constants equal to zero. The problem for the stream function is now completely specified.

Based on the boundary conditions, we assume a solution of the form

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta. \tag{8.3-7}$$

Substituting this expression into Eqs. (8.3-2), (8.3-5), and (8.3-6) gives

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} = 0, \tag{8.3-8}$$

$$f(R) = 0, \quad f(\infty) \rightarrow Ur. \tag{8.3-9}$$

Equation (8.3-8) is an equidimensional equation, with solutions of the form  $f = r^n$ . The characteristic equation obtained using this trial solution has the roots  $n = 1$  and  $n = -1$ . Using Eq. (8.3-9) to determine the two constants, the solution for the stream function is found to be

$$\psi(r, \theta) = UR \sin \theta \left( \frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right). \tag{8.3-10}$$

The streamlines for this flow are plotted in Fig. 8-6, in which the fore-and-aft symmetry is evident. The velocity components calculated from Eq. (8.3-10) are

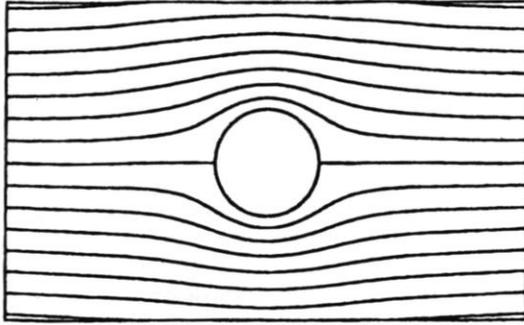


Figure 8-6. Streamlines for potential flow past a solid cylinder, assuming a uniform unperturbed velocity which is normal to the cylinder axis. The stream function is given by Eq. (8.3-10), and there are equal increments in  $\psi$  between adjacent streamlines.

$$v_{\theta}(r, \theta) = -U \sin \theta \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right]. \quad (8.3-12)$$

The tangential velocity evaluated at the cylinder surface is

$$v_{\theta}(R, \theta) = -2U \sin \theta. \quad (8.3-13)$$

which confirms that the no-slip condition is not satisfied. Because Eq. (8.3-2) is second order, there were no degrees of freedom to satisfy boundary conditions beyond Eqs. (8.3-5) and (8.3-6). The two surface locations at which both  $v_r$  and  $v_{\theta}$  vanish,  $\theta = \pi$  and  $\theta = 0$ , are called the upstream and downstream *stagnation points*, respectively.

A relatively simple way to evaluate the pressure is to use the special form of Bernoulli's equation derived for irrotational flow, Eq. (8.2-13). Setting  $\mathcal{P} = 0$  far from the cylinder, that equation reduces to

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} = \frac{U^2}{2}. \quad (8.3-14)$$

Using Eqs. (8.3-11) and (8.3-12) in Eq. (8.3-14), we obtain

$$\mathcal{P}(r, \theta) = \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left[ 2 - 4 \sin^2 \theta - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \quad (8.3-15)$$

for the full pressure field, and

$$\mathcal{P}(R, \theta) = \frac{\rho U^2}{2} [1 - 4 \sin^2 \theta] \quad (8.3-16)$$

for the pressure on the surface. The maximum pressure, equal to  $\rho U^2/2$ , is seen to occur at the stagnation points; this follows also by inspection of Eq. (8.3-14). The symmetry of  $\sin^2 \theta$  about  $\theta = \pi/2$  and  $\theta = 3\pi/2$  indicates that the pressure has fore-and-aft symmetry, which implies that there is no net pressure force on the cylinder. With neither a pressure force nor a viscous force in this model, there is no drag. This is an example of *d'Alembert's paradox*, mentioned in Section 8.2.

The pressure gradient along the surface is

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}(R, \theta) = -4\rho U^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (8.3-17)$$

It is seen that the pressure gradient favors forward flow on the upstream side of the cylinder (i.e.,  $\partial \mathcal{P}/\partial \theta > 0$  for  $\pi > \theta > \pi/2$ ) but opposes it on the downstream side. The development of a significant adverse pressure gradient on the trailing side, which is the cause of boundary layer separation, is