Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Polinômios Ortogonais - Relaçoes de Recorrência

Nelson Kuhl

IME/USP

1 de outubro de 2020

Revisão - Produtos Internos

- **Domínios discretos** São dados n pontos distintos $\{x_i\}_{i=1}^n$ e n números *positivos* (pesos) $\{\omega_i\}_{i=1}^n$. O produto interno é definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \omega_i u(x_i) v(x_i) \tag{1}$$

- **Domínios contínuos** Dados $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e uma função peso $\omega(x)$ contínua e positiva em (a, b), e tal que $\int_a^b \omega(x) p(x)\, dx$ existe para qualquer polinômio $p(x)$, o produto interno é definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \omega(x) u(x) v(x)\, dx \tag{2}$$

Revisão - Polinômios Ortogonais

Polinômios ortogonais

Dado um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathcal{P}$, uma família de polinômios ortogonais em relação a este produto interno é uma família $\{p_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ de elementos de $\mathcal{P}$ onde

1. o grau de p_n é igual a n;
2. $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ se $n \neq m$.

Revisão - Propriedades

Propriedade 1

Se $\{p_k\}$ é uma família de polinômios ortogonais e $p(x)$ é um polinômio de grau m, então p pode ser representado de maneira única por $p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x)$, onde $c_k = \frac{\langle p_k, p \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}$.

Propriedade 2

Se $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ é uma família de polinômios ortogonais e $p(x)$ é um polinômio de grau m, então $\langle p_j, p \rangle = 0$ para todo $j > m$.

Propriedade 3

Se $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ são duas famílias de polinômios ortogonais relativamente ao **mesmo produto interno**, então existem únicos números reais $\lambda_k \neq 0$ tais que $q_k(x) = \lambda_k p_k(x)$.

Revisão - Polinômios Ortogonais Mônicos

A família dos polinômios ortogonais mônicos em relação a um produto interno da forma (1) ou (2) é a família $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ dos polinômios ortogonais em relação a este produto interno tal que o coeficiente de x^k de $p_k(x)$ é 1. Eles são gerados pelas relação de recorência de três termos

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k \geq 0, \tag{3}$$

com

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1$$

e

$$\alpha_k = \frac{\langle x p_k, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}, \ k \geq 0, \quad \beta_k = \frac{\langle p_k, p_k \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}, \ k \geq 1.$$

Relações de Recorrência

Devido à Propriedade 3, podemos concluir de (3) o seguinte fato relevante:

- **Qualquer família** de polinômios ortogonais $\{\phi_k\}$, $k = 0, 1, \ldots,$ em relação a um produto interno da forma (1) ou (2), satisfaz uma relação de recorrência de três termos

$$\phi_{k+1}(x) = a_k(x)\phi_k(x) - b_k\phi_{k-1}(x), \quad k \geq 0, \tag{4}$$

  com $\phi_{-1}(x) = 0$.

A constante b_k não é necessariamente positiva, mas o sinal menos foi deixado em frente dela pois para as famílias clássicas de polinômios ortogonais ela é de fato positiva.

Relações de Recorrência

A relação (3) é útil para gerarmos polinômios ortogonais em domínios discretos, pois neste caso são usados somentes valores de funções em pontos discretos e somatórias. Para domínios contínuos, ainda mais com funções pesos, o cálculo de integrais é mais complicado. Porém, para as famílias clássicas de polinômios ortogonais, as relações de recorrência são conhecidas.

Exemplos

Exemplo 1

Polinômios de Legendre: $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x), \quad k \geq 0,$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$.

Exemplo 2

Polinômios de Chebyshev: $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$T_{k+1}(x) = \gamma_k x T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 0,$$

com $T_{-1}(x) = 0$, $T_0(x) = 1$, $\gamma_0 = 1$ e $\gamma_k = 2$, $k \geq 1$.

Exemplos

Exemplo 3

Polinômios de Hermite: $\langle u, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} u(x)v(x)\, dx$

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), \quad k \geq 0,$$

com $H_{-1}(x) = 0$ e $H_0(x) = 1$.

Exemplo 4

Polinômios de Laguerre: $\langle u, v\rangle = \int_{0}^{\infty} e^{-x} u(x)v(x)\, dx$

$$(k+1)L_{k+1}(x) = (2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x), \quad , k \geq 0,$$

com $L_{-1}(x) = 0$ e $L_0(x) = 1$.

Algoritmo de Clenshaw

As relações de recorrência nos permitem obter expressões para os polinômios de uma família ortogonal, mas muitas vezes este não é o interesse. Suponha que queremos avaliar uma expressão da forma

$$S_m(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{m} c_k \phi_k(\bar{x})$$

onde c_k são coeficientes dados ou calculados previamente e $\{\phi_k\}_{k=0}^{m}$ é uma família satisfazendo a relação de recorrência de três termos (4). Esta expressão pode ser avaliada da seguinte forma.

Algoritmo de Clenshaw

1. $y_m = c_m$; $y_{m-1} = c_{m-1} + a_{m-1}(\bar{x})y_m$;
2. para $k = m-2 : -1 : 0$, $y_k = c_k + a_k(\bar{x})y_{k+1} - b_{k+1}y_{k+2}$;
3. $S_m(\bar{x}) = y_0\phi_0(\bar{x})$.