Lógica
Aula 8

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Valores Verdade

T: "verdadeiro"
F: "falso"

Valoração:

$$v : \mathcal{P} \to \{T, F\}$$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = T$ sse se $v(\alpha) = T$ então $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = T$ sse $v(\alpha) = F$
- $v(\alpha \wedge \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \vee \beta) = T$ sse $v(\alpha) = T$ ou $v(\beta) = T$
- $v(\alpha \to \beta) = T$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = T$

Valor verdade de fórmulas complexas

- $v(\neg\alpha) = F$ sse $v(\alpha) = T$
- $v(\alpha \wedge \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ ou $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \vee \beta) = F$ sse $v(\alpha) = F$ e $v(\beta) = F$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = F$ sse $v(\alpha) = T$ e $v(\beta) = F$

Tabelas Verdade

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

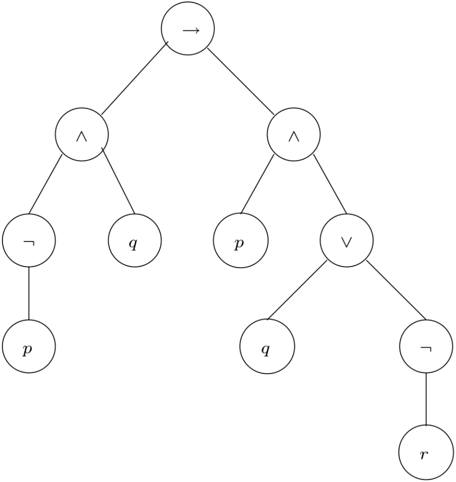
ϕ	ψ	$\phi \to \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	$\neg\phi$
T	F
F	T

$\top$
T

$\bot$
F

Árvore de análise



Consequência Lógica

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

$$\Updownarrow$$

Se $v(\varphi_i) = T$, então $v(\psi) = T$

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to r$
F	F	F				
F	F	T				
F	T	F				
F	T	T				
T	F	F				
T	F	T				
T	T	F				
T	T	T				

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T			
F	F	T	F			
F	T	F	T			
F	T	T	F			
T	F	F	T			
T	F	T	F			
T	T	F	T			
T	T	T	F			

Exemplo

$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F	T	T		
F	F	T	F	T		
F	T	F	T	F		
F	T	T	F	F		
T	F	F	T	T		
T	F	T	F	T		
T	T	F	T	F		
T	T	T	F	F		

Exemplo

$(p \land \neg q) \to r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \to r$
F	F	F	T	T	F	
F	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	F	F	
F	T	T	F	F	F	
T	F	F	T	T	T	
T	F	T	F	T	T	
T	T	F	T	F	F	
T	T	T	F	F	F	

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Exemplo

$(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r, p \models q$ ("Se teve greve de ônibus e não havia táxi na estação, então João atrasou para a aula.")

p	q	r	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \implies \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica:

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

A dedução natural é **completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Relação entre $\vdash$ e $\models$

A dedução natural é **correta e completa** em relação à semântica:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \iff \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se $M(1)$ e supondo $M(n)$ provamos $M(n+1)$, então M vale para qualquer natural.

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural: encontrar relação entre fórmulas e naturais.

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural: encontrar relação entre fórmulas e naturais.
Exemplo: Toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural: encontrar relação entre fórmulas e naturais.
Exemplo: Toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".
Usar altura da árvore!

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural: encontrar relação entre fórmulas e naturais.
Exemplo: Toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".
Usar altura da árvore!

<u>Base:</u> n = 1 (átomo)

Provas por indução estrutural

Indução matemática: Se M(1) e supondo M(n) provamos M(n+1), então M vale para qualquer natural.
Exemplo: $\sum_{i=1}^{n} i = n * (n+1)/2$

Indução estrutural: encontrar relação entre fórmulas e naturais.
Exemplo: Toda fbf tem o mesmo número de "(" e ")".
Usar altura da árvore!

Base: n = 1 (átomo)
Passo: Fbfs com altura até n possuem a propriedade, mostrar para árvore de altura n+1

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Átomos
- Se φ é fbf, então $(\neg\varphi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \vee \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \wedge \psi)$ é fbf
- Se φ e ψ são fbfs, então $(\varphi \to \psi)$ é fbf

Backus Naur Form (BNF)

$$\varphi ::= p|(\neg\varphi)|(\varphi \vee \varphi)|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \to \varphi)$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Base: Provas de 1 linha

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

Base: Provas de 1 linha

Passo: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.
Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.

Prova da correção

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

Ideia: indução no comprimento das provas!

<u>Base:</u> Provas de 1 linha

<u>Passo:</u> $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ tem prova de tamanho k.
Suponha que vale correção para provas de tamanho $< k$.
Qual a última regra aplicada?

Resumo - regras

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge_{e_2} \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee_{i_2}$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \xi\end{array}}}{\xi} \vee_e \qquad \frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \to_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi} \to_i$$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} \neg\neg_e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot} \neg_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi} \neg_i \qquad \frac{\bot}{\phi} \bot_e$$