Lema de Fatou: Se f_n sequência em M^+ temos que $\int$ $liminf$ f_n $d\mu$ $\leq$ $liminf$ $\int f_n$.
Dem: por definição, $liminf f_n(x) = sup_n\ inf_{k \geq n}\ (f_n(x))$
Definimos $g_n = inf_{k\ \geq n}\{f_n\}$. Estas funções são mensuráveis porque são o ínfimo de uma sequência de mensuráveis. $\{g_n\}$ é uma sequência não decrescente.
Segue que $\int\ g_n\ d\mu\ \leq\ \int\ f_k\ d\mu\ \forall\ k\ \geq\ n$
e portanto $\int\ g_n\ d\mu\ \leq\ \inf_{k\ \geq\ n}\ \int\ f_k\ d\mu$.
Logo, como g_n não decrescente segue que
$sup\ \int\ g_n\ d\mu\ \leq sup_n\ (\inf_{k\ \geq\ n}\ \int\ f_k\ d\mu) =\ liminf\ \int\ f_n\ d\mu$.**A**
Também $lim\ g_n\ =\ sup\ (g_n)$
Pelo Teorema da Conv Monótona, temos que $\int\ g_n\ d\mu\ \rightarrow\ \int\ sup\ (g_n)\ d\mu =$ $sup\ \int\ g_n\ d\mu$.**B**
Agora, observe que por **A** e **B** $\int\ liminf\ f_n\ d\mu\ =\ \int\ sup\ (g_n)\ d\mu\ =$ $sup\ \int\ g_n\ d\mu\ \leq\ liminf\ \int\ f_n\ d\mu\square$.

Exercício: No Lema de Fatou, A hipótese de ser não negativa não pode ser simplesmente descartada. Com efeito, se $f_n\ =\ (\frac{-1}{n})\chi_{[0,n]}$ segue que $\int\ f_n\ d\mu\ =\ -1$. Porém $f_n(x)\ \rightarrow\ 0$ e temos a desigualdade contrária.
Exercício: se $f_n\ \rightarrow\ f\ \in\ M^+$ e $\int\ f_n\ d\mu\ \rightarrow\ \int\ f\ d\mu$ então $\int_E\ f_n\ d\mu\ \rightarrow$ $\int_E\ f\ d\mu\ \forall\ E\ \in\ \mathcal{A}$. (ficou para ser resolvido pelos estudantes)

Proposição 1. *Se f integrável Riemann em [a,b] então f é mensurável para a medida de Lebesgue e* $\int_a^b\ f\ dx\ =\ \int_{[a,b]}\ f\ d\mu$.

Demonstração. Sejam α_n e β_n funções degrau $\alpha_n\ \leq\ f\ \leq\ \beta_n$, convergindo monótonamente para f, suas integrais convergindo para a Integral Inferior $\underline{\int}\ f\ dx$ e a Integral Superior $\overline{\int}\ f\ dx$ de f respectivamente e também tais que $\int\ \beta_n\ d\mu\ -\ \int\ \alpha_n\ d\mu\ \leq \frac{1}{n}$.
Sejam $\alpha*\ =\ sup(\alpha_n)$ e $\beta*\ =\ inf\ (\beta_n)$.
Tomemos $A\ =\ \{\beta*\ >\ \alpha*\}$. Queremos ver que $\mu(A)\ =\ 0$. Notemos que $A\ =\ \cup_1^{+\infty} A_k$ onde $A_k\ =\ \{\beta*\ -\alpha*\ \geq\ \frac{1}{k}\}$.
Também $A_{n,k}\ =\ \{\beta_n\ -\ \alpha_n\ \geq \frac{1}{k}\}\ \supset\ A_k$.
Por Chebyshev $\frac{1}{k}\ \mu(A_{n,k})\ \leq\ \frac{1}{n}$. Observe que $\mu(A_{n,k})$ tende para zero com n. E que $A_{n,k} \supset\ A_k$. Logo $\mu(A_k)\ =\ 0$. Como $A\ =\ \cup_1^{+\infty}\ A_k$ temos que $\mu(A)\ =\ 0$.
Portanto $\alpha*\ = f\ = \beta*$ qtp. Como $\alpha*$ *e* $\beta*$ são mensuráveis resulta f é mensurável.
Como α_n converge monótonamente para f, pelo Teorema da Convergência Monótona segue que $\int_{[a,b]}\ f\ d\mu\ =\ \underline{\int}\ f\ dx\ =\ \int\ f\ dx$. $\square$