Gabarito do 6º Práticas de demonstrações

Enunciados a demonstrar

1) Prove que para a equação do segundo grau com B = 0, $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Se A = 0 e C ≠ 0, esta equação pode representar:

*uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OX, se D ≠ 0;

*****duas retas distintas paralelas ao eixo OX, se D = 0 e $E^2 – 4CF > 0$;

*****uma reta paralela ao eixo OX, se D = 0 e $E^2 – 4CF = 0$;

*****o conjunto vazio, se D = 0 e $E^2 – 4CF < 0$.

Demonstração:

Suponhamos A = 0, C ≠ 0 e D ≠ 0.

Então, a equação do segundo grau se escreve na forma:

$y^2 + Ey/C + Dx/C + F/C = 0$.

Completando o quadrado, obtemos:

$(y + E/2C)^2 + Dx/C + F/C – E^2/4C^2 = 0$.

Como D ≠ 0, podemos escrever a equação na forma

$(y + E/2C)^2 = (-D/C)(x + (C/D)(F/C – E^2/4C^2))$,

que é a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX e vértice

$V = ([-4C^2F + CE^2]/4C^2D, -E/2C)$.

Se D = 0, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

* duas retas paralelas ao eixo OX,

$y = (-E + \sqrt{(E^2 – 4CF)})/2C$ e $y = (-E - \sqrt{(E^2 – 4CF)})/2C$, se $E^2 – 4CF > 0$;

*uma reta paralela ao eixo OX, $y = -E/2C$, se $E^2 – 4CF = 0$;

* o conjunto vazio, se $E^2 – 4CF < 0$.

2) Prove que se os coeficientes A e C da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, tem sinais opostos, então a equação representa: uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados **OU** um par de retas concorrentes.

Demonstração:

Suponhamos que A > 0 e C < 0.

Então,

$Ax^2 + Dx – (–Cy^2 – Ey) = – F$,

$(x^2 + Dx/A)/(-C) – (y^2 + Ey/C)/A = F/AC$,

$(x + D/2A)^2/(-C) – (y + E/2C)^2/A = F/AC – D^2/4A^2C – E^2/4AC^2$,

$(x + D/2A)^2/(-C) – (y + E/2C)^2/A = (4ACF – CD^2 -AE^2)/4A^2C^2$

Logo, se $4ACF – CD^2 – AE^2 \neq 0$, a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados,

se $4ACF – CD^2 – AE^2 = 0$,

então

$y + E/2C = \pm\sqrt{[(-A/C)]}.[(x + D/2A)]$,

representa o par de retas concorrentes