Vimos na aula passada, que o campo elétrico macroscópico

$$\vec{E} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_V \vec{E}(\vec{r}')\,d\tau'$$

no interior de um meio dielétrico polarizado e tal que a polarização é $\vec{P}$ (densidade de momento de dipolo), pode ser obtido a partir do termo de dipolo. Em termos do potencial eletrostático, temos

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{r}\cdot\vec{P}}{r^2}\,d\tau',}$$

onde $\vec{r}$ é um ponto qualquer do espaço e a integração é feita sobre todo o volume do dielétrico.

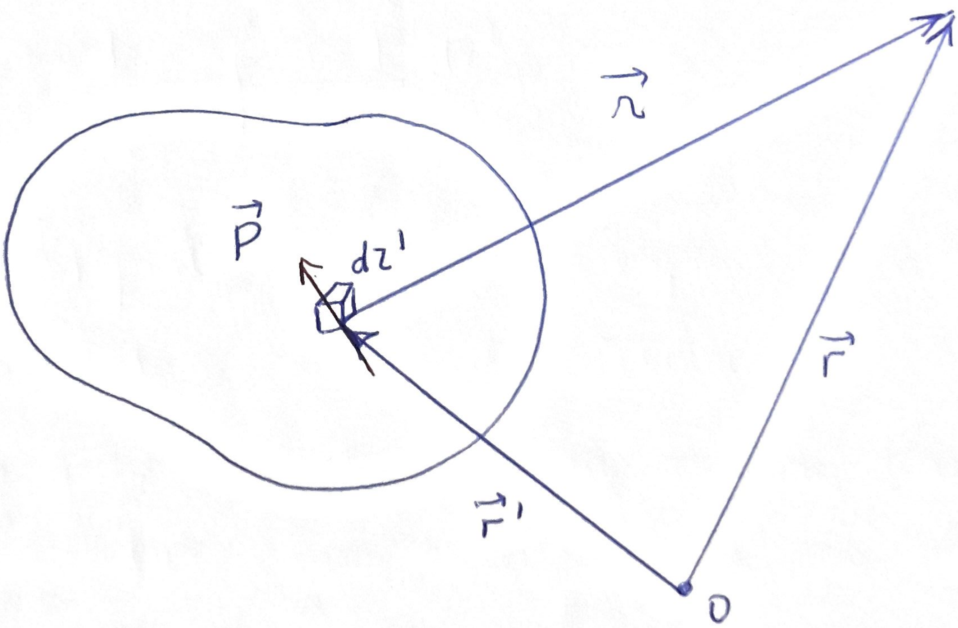
O cálculo feito na aula passada assumiu um volume interior ao dielétrico, mas você perceberá que o resultado é válido também para pontos externos ao meio dielétrico.

Vimos também no tópico de expansão multipolar que o campo elétrico gerado por um dipolo $\vec{p}$ na origem é dado por

$$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p} \right]$$

Portanto, o campo macroscópico gerado pelo meio de polarização $\vec{P}$ pode ser obtido via integração direta também

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathscr{r}^3} \left[3(\vec{P}\cdot\hat{\mathscr{r}})\,\hat{\mathscr{r}} - \vec{P} \right] d\tau'$$



Trabalhemo com o potencial que por ser uma quantidade escalar é mais facilmente manipulável matematicamente

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V} \frac{\hat{\imath} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\imath^2} d\tau'$$

↳ volume do dielétrico

Lembrando que

$$\frac{\hat{\imath}}{\imath^2} = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\imath}\right)$$

então

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V} \vec{P} \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\imath}\right) d\tau'$$

e também que

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{\imath}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\imath}\right) \cdot \vec{P} + \frac{1}{\imath} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$$

temos

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{\imath}\right) d\tau' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}}{\imath} d\tau'$$

E usando o teorema da divergência no primeiro termo

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}\cdot d\vec{a}'}{\imath} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(-\vec{\nabla}\cdot\vec{P})}{\imath} d\tau'$$

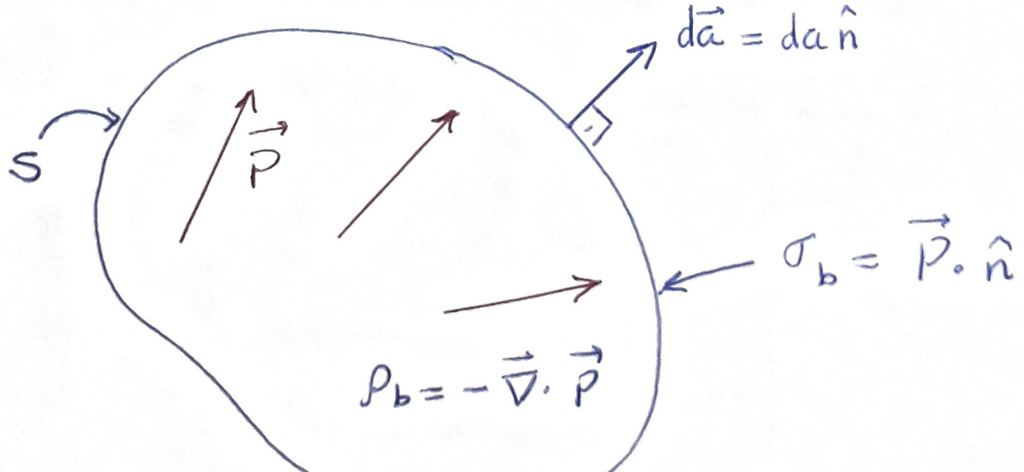
A primeira integral pode ser interpretada como o potencial gerado por uma densidade superficial de carga

$$\boxed{\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}}$$

"b" = bound (ligada)

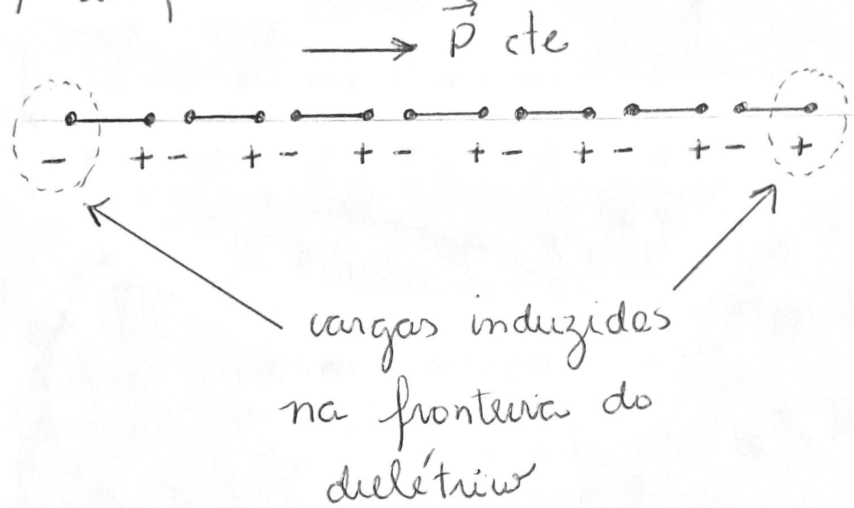
enquanto o segundo termo é equivalente ao potencial gerado por uma densidade volumétrica de carga

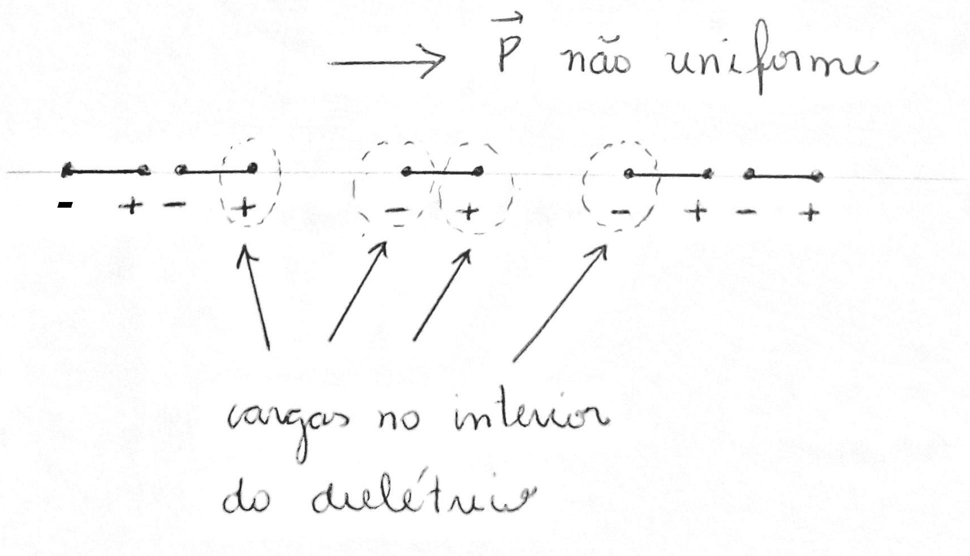
$$\boxed{\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}$$



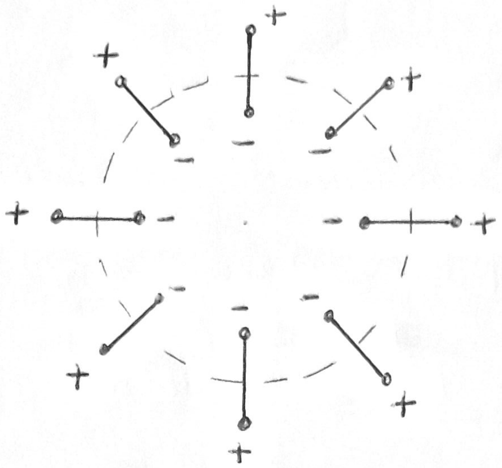
As cargas de densidade σ_b e ρ_b são cargas físicas genuínas induzidas no meio devido à polarização deste.

Para compreender isso tomemos o caso mais simples possível de um meio dielétrico hipotético unidimensional e com polarização (momento de dipolo por unidade de comprimento) uniforme

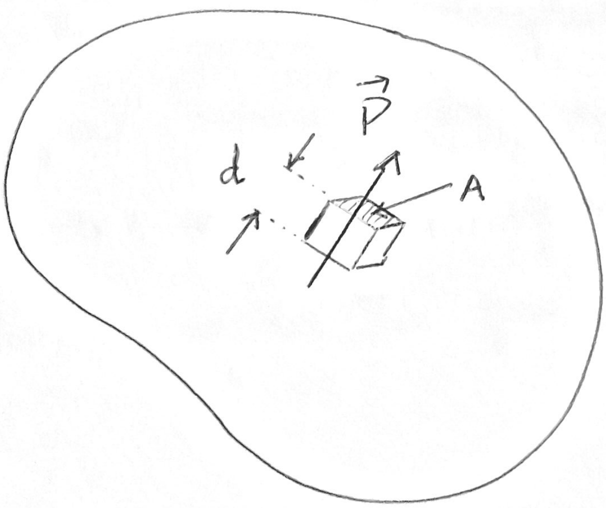




Campo de polarização divergindo a partir de um ponto



Num pequeno volume de dielétrico:



$$\vec{p} = \vec{P} A d$$

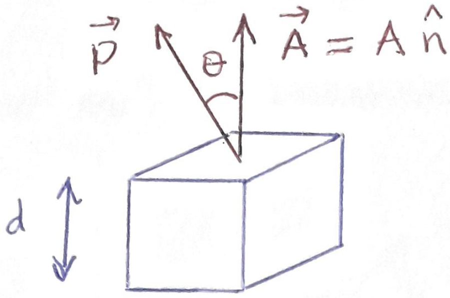
$$p = P A d$$

$$\Downarrow$$

$$q d = P A d$$

Logo, a carga acumulada nas faces opostas do volume $V = A d$ é

$$q = P A \Rightarrow \sigma_b = \frac{q}{A} = P \quad \left(\vec{P} \perp \text{ à face de área } A \right)$$



$$\vec{P} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_{//}$$

$\perp$ à face

$//$ à face

$$\vec{p}_\perp = \vec{P}_\perp A d$$

$$p_\perp = P_\perp A d \Rightarrow qd = P\cos\theta \, A d \Rightarrow q = P\cos\theta \, A$$

$$\sigma_b = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Como as cargas ligadas de densidade σ_b e ρ_b são cargas do próprio material, ou seja, não foram adicionadas ao material, mas sim induzidas pelo processo de polarização, elas devem ser tais que a carga total ligada deve ser nula.

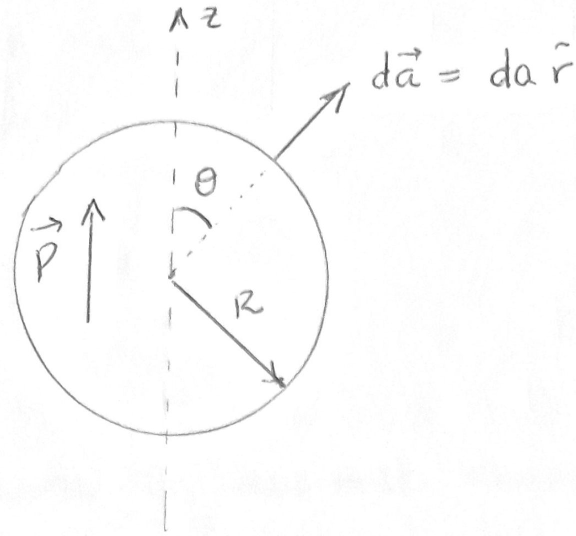
Prova:

$$Q_\sigma = \oint_S \sigma_b \cdot da' = \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} \, da' = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a}'$$

$$Q_\rho = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, d\tau' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a}' = -Q_\sigma$$

teorema da divergência

Esfera de raio R uniformemente polarizada



$$\vec{P} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0 \Rightarrow \rho_b = 0$$

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta$$

Ou seja, o potencial eletrostático gerado por uma esfera uniformemente polarizada é o mesmo gerado por uma casca esférica com densidade superficial de carga

$\sigma_b = P\cos\theta.$

$$\begin{cases} V(r \leq R) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta) = V_<(r) \\ V(r \geq R) = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\theta) = V_>(r) \end{cases}$$

Continuidade do potencial

$$V_<(R) = V_>(R)$$

implica que

$$B_l = R^{2l+1} A_l$$

E a descontinuidade na derivada normal de V

$$\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_R - \left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_R = -\frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$$

implica que

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_{-1}^{1} \sigma(x) P_l(x)\, dx$$

Nesse caso particular $\sigma(x) = Px = P_1(x)P$, portanto

há um único coeficiente A_l não-nulo

$$A_1 = \frac{P}{2\epsilon_0} \underbrace{\int_{-1}^{1} P_1(x) P_1(x)\, dx}_{2/3} = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Então

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta \quad , & r \leq R \\[2ex] \dfrac{P}{3\epsilon_0} \dfrac{R^3}{r^2} \cos\theta \quad , & r \geqslant R \end{cases}$$

O correspondente campo elétrico é

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

$r < R$:

$$\vec{E} = -\frac{P}{3\epsilon_0}\left(\cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta} \right) = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{z} = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$r > R$:

$$\vec{E} = -\frac{P}{3\epsilon_0} R^3 \left\{ -\frac{2}{r^3}\cos\theta\, \hat{r} - \frac{1}{r^3}\sin\theta\, \hat{\theta} \right\}$$

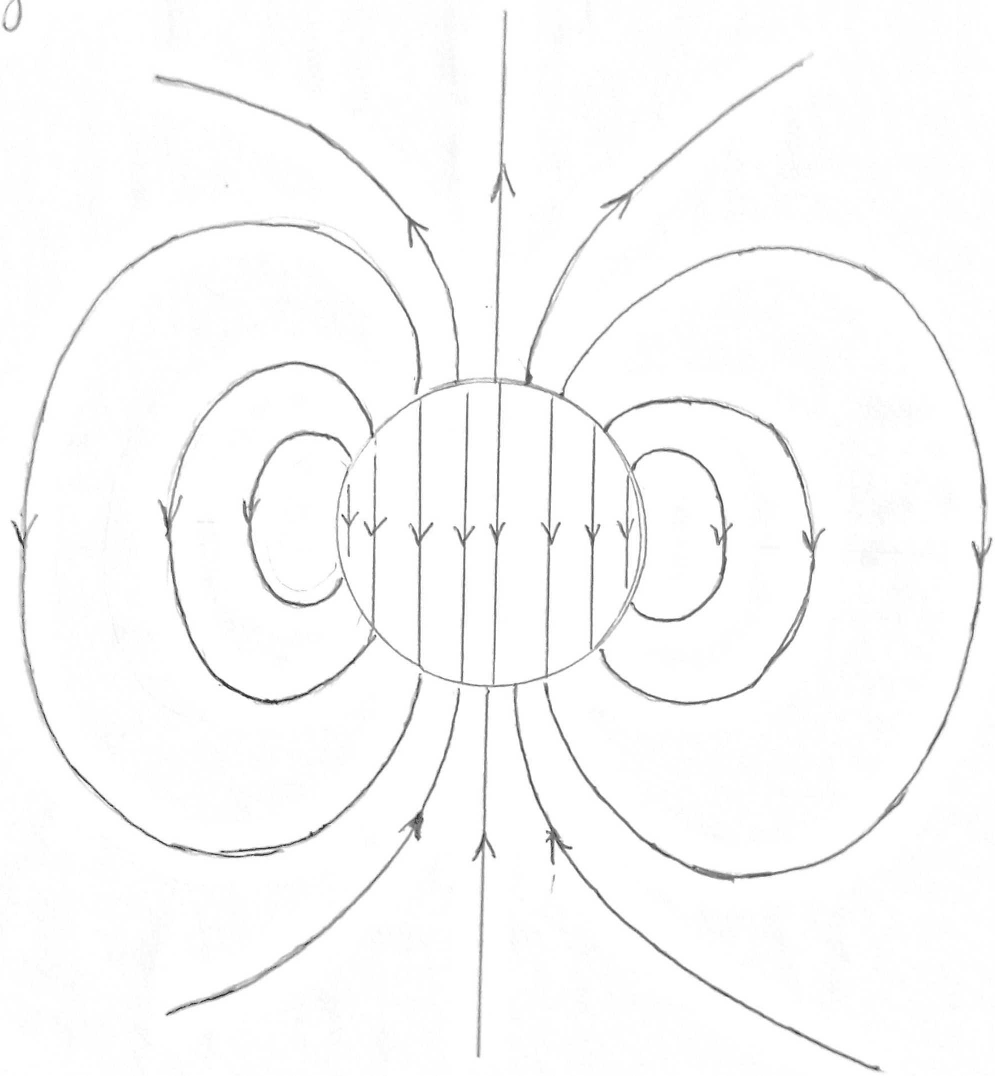
$$= +\frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^3} \left\{ 3\cos\theta\, \hat{r} - \cos\theta\, \hat{r} + \sin\theta\, \hat{\theta} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3} \left\{ 3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p} \right\} \quad \text{com } \vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

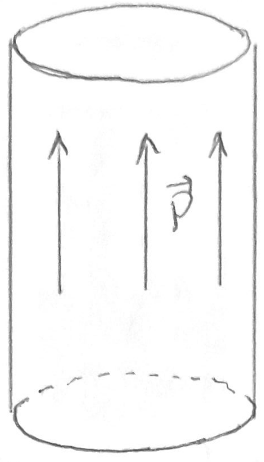
Ou seja, o campo na região $r > R$ é aquele de um dipolo de momento

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

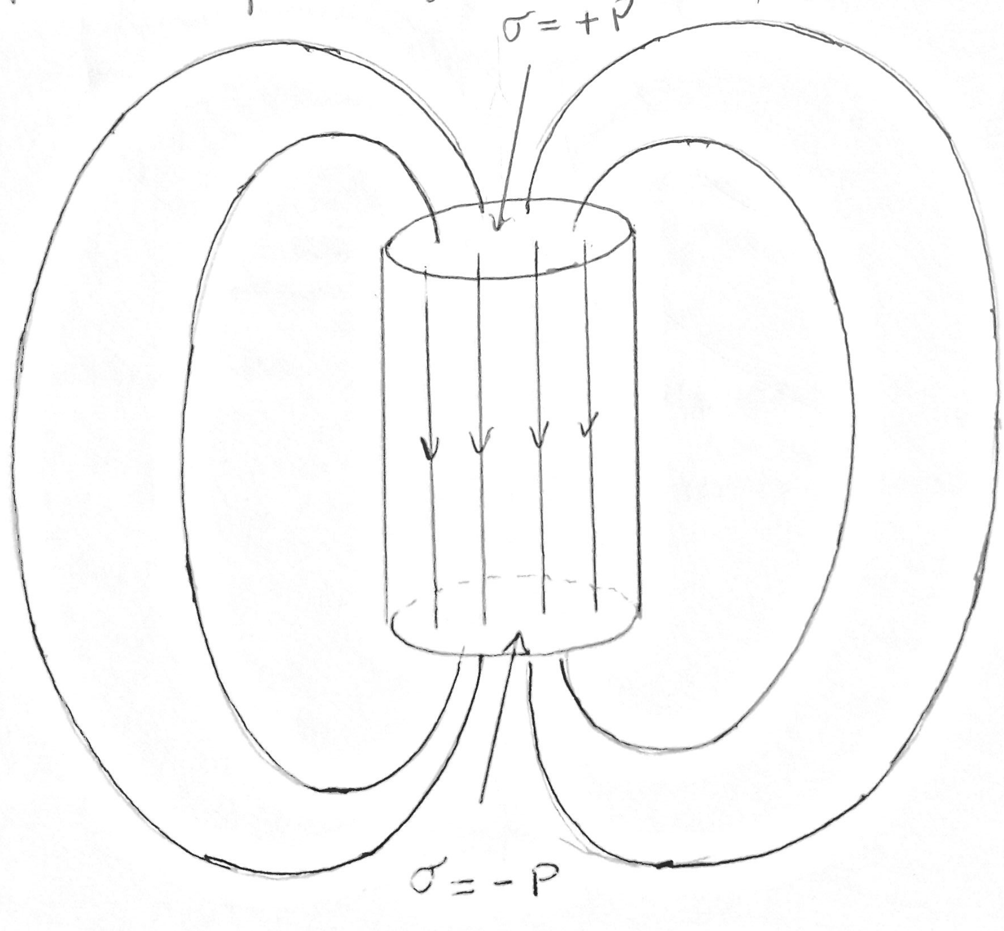
na origem.



No caso de uma barra cilíndrica com polarização uniforme como a mostrada abaixo



vemos que haverá densidades de carga uniformes $\pm\sigma$ nas faces superior e inferior do cilindro. Já no volume, como $\vec{P}$ é uniforme, $\rho_b = 0$.



Além das cargas ligadas, o dielétrico também pode conter uma certa quantidade de cargas "livres", ou seja, adicionadas ao dielétrico por um agente externo.

O nome livre não é completamente apropriado, porque pode dar a impressão de que tais cargas podem se mover livremente pelo material como no caso de um condutor. Num dielétrico (isolante) a mobilidade dessas cargas extra é muito limitada.

Eu manterei a mesma nomenclatura do livro-texto, no entanto.

No interior do dielétrico, temos então

$$\rho = \underbrace{\rho_b}_{\text{densidade de carga ligada}} + \underbrace{\rho_f}_{\text{densidade de cargas "livres" (extra)}}$$

a lei de Gauss então implica

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_f$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}_{\equiv \vec{D}} = \rho_f$$

$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ é chamado de <u>deslocamento elétrico</u>

Perceba que $\vec{D}$ satisfaz

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f}$$

de forma que o teorema da divergência implica

$$\boxed{\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f}$$

Portanto, problemas com determinadas simetrias podem ser resolvidos em termos de $\vec{D}$ desde que conheçamos a densidade de cargas livres ρ_f.

Se além de ρ_f conhecermos também, nessas situações, a polarização $\vec{P}$, podemos o campo elétrico $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\vec{D} - \vec{P})$.

Não se deixe enganar pela aparente similaridade entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{D}$. Não é possível adaptar todas as fórmulas de $\vec{E}$ para $\vec{D}$ apenas trocando ρ por ρ_f.

Por exemplo, vimos que o campo elétrico pode ser obtido por integração direta a partir da densidade de carga ρ.

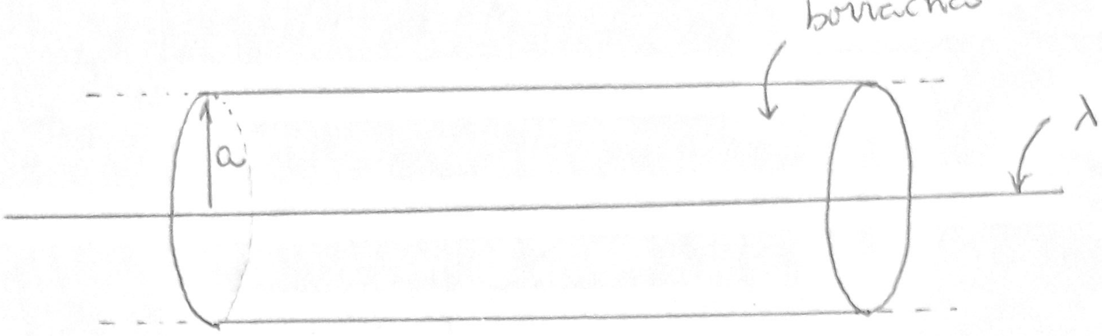
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \rho(\vec{r}\,')\, d\tau'$$

Essa equação pode ser vista como uma consequência direta do teorema de Helmholtz para um campo irrotacional $(\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0})$.

Uma equação não existe no caso geral para $\vec{D}$, já que

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \underbrace{\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{E}}}_{\vec{0}} + \vec{\nabla} \times \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$$

Fio longo com densidade de carga λ envolto por uma camada cilíndrica de borracha isolante.



De acordo com a lei de Gauss e o fato de que por simetria, os campos devem depender só da distância s ao fio, uma superfície gaussiana cilíndrica de raio s implica que (e comprimento L)

$$D(2\pi s L) = Q_f = \lambda L \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi s}$$

Então $\vec{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi s}\hat{s}$

Fora do cilindro isolante, ou seja, para $s > a$, não há polarização ($\vec{P} = \vec{0}$), portanto

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{s}$$
$$= \vec{E}(s>a)$$

(Para $s \leq a$ não podemos determinar $\vec{E}$, pois não sabemos $\vec{P}$)