# PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Otimização sem Restrições

PTC - EPUSP

*Aula 19 - 2020*

## Otimização sem Restrições

Queremos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; f(x)$$

## Mínimo Global

- Diremos que $\bar{x}$ é um mínimo global de $f$ se para todo $x \in \mathbb{R}^n$
$$f(\bar{x}) \leq f(x).$$
- Diremos que $\bar{x}$ é um mínimo global estrito de $f$ se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq \bar{x}$,
$$f(\bar{x}) < f(x).$$

## Mínimo Local

- Diremos que $\bar{x}$ é um mínimo local de $f$ se para algum $\epsilon > 0$ temos que para todo $x$ tal que $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon$,

$$f(\bar{x}) \leq f(x).$$

- Diremos que $\bar{x}$ é um mínimo local estrito de $f$ se para algum $\epsilon > 0$ temos que para todo $x$ tal que $\|x - \bar{x}\| \leq \epsilon$,

$$f(\bar{x}) < f(x).$$

## Direção de Descida

- Diremos que $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida de $f$ em $\bar{x}$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$$

para todo $\lambda$ tal que $0 < \lambda < \delta$

## Gradiente

Suponha que $f$ seja diferenciável em $\bar{x}$. O gradiente de $f$ em $\bar{x}$ é definido como:

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

## Matriz Hessiana

Suponha que $f$ seja duas vezes diferenciável em $\bar{x}$. A matriz hessiana de $f$ em $\bar{x}$ é a matriz simétrica $n \times n$ definida como:

$$H(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

## Exemplo

Calcule o gradiente e matriz hessiana de

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1$$

### Teorema

Suponha que $f$ seja diferenciável em $\bar{x}$. Então

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) + \Delta(\bar{x}, x)\|x - \bar{x}\|$$

onde $\Delta(\bar{x}, x) \to 0$ as $x \to \bar{x}$.

## Teorema

Suponha que $f$ seja 2 vezes diferenciável em $\bar{x}$. Então

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})'(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})' H(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ + \xi(\bar{x}, x)\|x - \bar{x}\|^2$$

onde $\xi(\bar{x}, x) \to 0$ as $x \to \bar{x}$.

## Teorema

Suponha que $f$ seja diferenciável em $\bar{x}$. Então qualquer vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla f(\bar{x})'d < 0$$

é uma direção de descida de $f$ em $\bar{x}$.

# Verificação

# Verificação

**Teorema - Condição Necessária de $1^a$ ordem**

Suponha que $f$ seja diferenciável em $\bar{x}$. Então uma condição necessária para que $\bar{x}$ seja um ponto de mínimo local de $f$ é que

$$\nabla f(\bar{x}) = 0.$$

# Verificação

## Exemplo

Calcule os pontos em que o gradiente é igual a zero da função

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1$$

# Recordação - Matrizes Positiva Semi-Definida e Positiva Definida

## Teorema - Condição Necessária de $2^a$ ordem

Suponha que $f$ seja 2 vezes diferenciável em $\bar{x}$. Então uma condição necessária para que $\bar{x}$ seja um ponto de mínimo local de $f$ é que

1. $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2. $H(\bar{x}) \geq 0$ (positiva semi-definida)

# Verificação

## Teorema - Condição Suficiente de $2^a$ ordem

Suponha que $f$ seja 2 vezes diferenciável em $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é tal que

1. $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2. $H(\bar{x}) > 0$ (positiva definida)

então $\bar{x}$ é um ponto de mínimo local estrito de $f$.

# Verificação

## Definição - Ponto de Sela

Suponha que $f$ seja 2 vezes diferenciável em $\bar{x}$. Se $\bar{x}$ é tal que

1. $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2. $det(H(\bar{x})) \neq 0$ (autovalores não são zero)
3. $H(\bar{x})$ é indefinida (tem autovalores positivos e negativos

então $\bar{x}$ é um ponto de sela.

## Exemplo

$$f(x) = (x^2 - 1)^3$$

## Exemplo

Determine os pontos de mínimo local, máximo local, e pontos de sela da função

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1$$

### Exemplo

Determine os pontos de mínimo local, máximo local, e pontos de sela da função

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2$$

## Exemplo

Determine os pontos de mínimo local, máximo local, e pontos de sela da função

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^3 - x_1 x_2$$