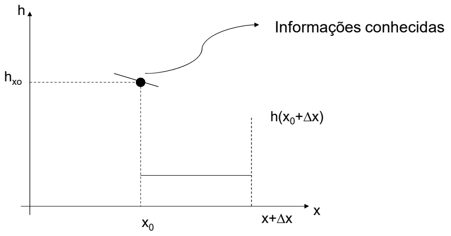
## Métodos de Diferenças Finitas




## Séries de Taylor

$\frac{dh}{dx} = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} + 0\,(\Delta x)$ Ascendente

$\frac{dh}{dx} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} + 0\,(\Delta x)$ Descendente

$\frac{dh}{dx} = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} + 0\,(\Delta x^2)$ Central

$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2} + 0\,(\Delta x^2)$ Central

## Séries de Taylor

- Diferenças ascendentes 0 ($\Delta$x)

| | $h_i$ | $h_{i+1}$ | $h_{i+2}$ | $h_{i+3}$ | $h_{i+4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | −1 | 1 | | | |
| $\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | 1 | −2 | 1 | | |
| $\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | −1 | 3 | −3 | 1 | |
| $\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | 1 | −4 | 6 | −4 | 1 |

+ 0 ($\Delta$x)

- Diferenças descendentes 0 ($\Delta$x)

| | $h_{i-4}$ | $h_{i-3}$ | $h_{i-2}$ | $h_{i-1}$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | | | | −1 | 1 |
| $\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | | | 1 | −2 | 1 |
| $\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | | −1 | 3 | −3 | 1 |
| $\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | 1 | −4 | 6 | −4 | 1 |

+ 0 ($\Delta$x)

## Séries de Taylor

- Diferenças ascendentes 0 ($\Delta x^2$)

| | $h_i$ | $h_{i+1}$ | $h_{i+2}$ | $h_{i+3}$ | $h_{i+4}$ | $h_{i+5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | −3 | 4 | −1 | | | |
| $\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | 2 | −5 | 4 | −1 | | |
| $2\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | -5 | 18 | −24 | 14 | −3 | |
| $\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | 3 | −14 | 26 | −24 | 11 | −2 |

+ 0 ($\Delta x^2$)

- Diferenças descendentes 0 ($\Delta x^2$)

| | $h_i$ | $h_{i+1}$ | $h_{i+2}$ | $h_{i+3}$ | $h_{i+4}$ | $h_{i+5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | | | | 1 | −4 | 3 |
| $\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | | | −1 | 4 | −5 | 2 |
| $2\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | | 3 | −14 | 24 | −18 | 5 |
| $\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | −2 | 11 | −24 | 26 | −14 | 3 |

+ 0 ($\Delta x^2$)

## Séries de Taylor

- Diferenças centrais 0 ($\Delta x^2$)

| | $h_{i-2}$ | $h_{i-1}$ | $h_i$ | $h_{i+1}$ | $h_{i+2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | | −1 | 0 | 1 | |
| $\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | | 1 | −2 | 1 | |
| $2\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | 1 | 2 | 0 | −2 | 1 |
| $\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | −1 | −4 | 6 | −4 | 1 |

+ 0 ($\Delta x^2$)

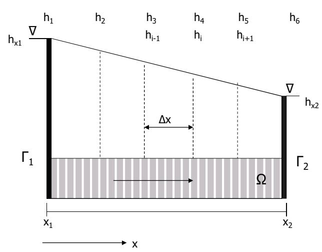
- Diferenças centrais 0 ($\Delta x^4$)

| | $h_{i-3}$ | $h_{i-2}$ | $h_{i-1}$ | $h_i$ | $h_{i+1}$ | $h_{i+2}$ | $h_{i+3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $12\Delta x \frac{\partial h}{\partial x} =$ | | 1 | −8 | 0 | 8 | −1 | |
| $12\Delta x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} =$ | | −1 | 16 | −30 | 16 | −1 | |
| $8\Delta x^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} =$ | 1 | −8 | 13 | 0 | −13 | 8 | −1 |
| $6\Delta x^4 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} =$ | −1 | 12 | −39 | 56 | −39 | 12 | −1 |

+ 0 ($\Delta x^4$)

## Diferenças finitas (uni-dimensional)

- Exemplo de Darcy



## Diferenças finitas (uni-dimensional)

- Equação diferencial parcial

$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla(K \nabla h)+Q$

$0 = K\nabla^2 h \longrightarrow \nabla^2 h = 0$ (Eq. Laplace)

$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0}$, em $\Omega$ $\longrightarrow$ Equação diferencial parcial

$h_1 = 50$ m , em $\Gamma_1$

$h_2 = 10$ m , em $\Gamma_2$

## Métodos diretos

1º Discretização do domínio;

2º Aproximação da EDP por quocientes de diferenças;

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1}-2h_i+h_{i-1}}{\Delta x^2} + 0\,(\Delta x^2)$

3º Construção do extencil padrão;

$\boxed{h_{i-1}-2h_i+h_{i+1} = 0}$

Aproximação de $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$

## Métodos diretos

4º Construção do sistema de equações

- i=1 $h_1 = 50$ m
- i=2 $h_1-2h_2+h_3 = 0$
- i=3 $h_2-2h_3+h_4 = 0$
- i=4 $h_3-2h_4+h_5 = 0$
- i=5 $h_4-2h_5+h_6 = 0$
- i=6 $h_6 = 10$ m

## Métodos diretos

- Forma matricial

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} * \begin{Bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

## Métodos iterativos

- Método de Jacobi

$h_i^v = \frac{h_{i+1}^{v-1} + h_{i-1}^{v-1}}{2}$

Sendo
v= Iteração atual
v− 1 = Iteração anterior

## Métodos iterativos

Método de Jacobi

| | h1 | h2 | h3 | h4 | h5 | h6 | Dif. Max. Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Início | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | |
| 1ª Iteração | 50 | 25 | 0 | 0 | 5 | 10 | 25 |
| 2ª Iteração | 50 | 25 | 12,8 | 2,5 | 5 | 10 | 12,5 |
| 3ª Iteração | 50 | 31,3 | 13,8 | 8,75 | 6,25 | 10 | 6,25 |
| : | : | : | : | : | : | : | : |
| 35ª Iteração | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | 0,008 |
| | | | | | | | |
| Solução exata | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | |

## Métodos iterativos

Método de Gauss-Seidel

| | h1 | h2 | h3 | h4 | h5 | h6 | Dif. Max. Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Início | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | |
| 1ª Iteração | 50 | 25 | 12,5 | 6,25 | 8,13 | 10 | 25 |
| 2ª Iteração | 50 | 31,3 | 18,8 | 13,4 | 11,7 | 10 | 7,19 |
| 3ª Iteração | 50 | 34,4 | 23,9 | 17,8 | 13,9 | 10 | 5,16 |
| : | : | : | : | : | : | : | : |
| 18ª Iteração | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | 0,009 |
| | | | | | | | |
| Solução exata | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | |

## Métodos iterativos

Método SOR ( $\omega = 1,3$)

| | h1 | h2 | h3 | h4 | h5 | h6 | Dif. Max. Δ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Início | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | |
| 1ª Iteração | 50 | 32,5 | 21,1 | 13,7 | 15,4 | 10 | 32,5 |
| 2ª Iteração | 50 | 36,5 | 26,3 | 23 | 16,8 | 10 | 9,27 |
| 3ª Iteração | 50 | 38,7 | 32,2 | 25 | 17,7 | 10 | 5,93 |
| : | : | : | : | : | : | : | : |
| 9ª Iteração | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | 0,003 |
| | | | | | | | |
| Solução exata | 50 | 42 | 34 | 26 | 18 | 10 | |

## Critérios de parada da iteração

- Critérios do erro absoluto - $\Delta^{\nu} = \max |h_i^{\nu}-h_i^{\nu-1}|$
- Critério do erro relativo - $E^{\nu}= \Delta^{\nu}/M^{\nu}$
- Soma do erros - $S^{\nu} =\Sigma |h_i^{\nu}-h_i^{\nu-1}|$
- Norma euclidiana do resíduo
  $[A].\{h\}=\{f\} \longrightarrow R= \{f\} – [A].\{h\} \neq 0$
- Número máximo de iterações

## Esquemas iterativos avançados

- Utilizado quando o n>1000, sendo n 0 número de incógnitas.
- Problemas pequenos (n≤400):
  - Algoritmo de Thomas
  - Eliminação de Gauss
  - Eliminação de Gauss-Jordan

## Esquemas iterativos avançados

- Problemas médios (400<n≤1000):
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Seidel
  - Successive Over-Relaxation (SOR)
  - Symmetric SOR (SSOR)

## Esquemas iterativos avançados

- Problemas muito grandes (n>1000):
  - Gradiente Conjugados (CG)
  - Minimal Residual (MINRES)
  - Generalized Minimal Residual (GMRES)
  - Biconjugate Gradient (BiCG)
  - Biconjugate Gradient stabilized (BiCGSTAB)