MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 9 (01/10/2020)

O que é *contar*?

Contar é estabelecer uma bijeção entre um conjunto de objetos e o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, para algum n fixado.

Conjuntos equipotentes

Dizemos que os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, ou são equipotentes, se existir uma função bijetora $f : A \to B$.

Nesse caso, escrevemos $A \sim B$.

Essa relação claramente satisfaz as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $A \sim A$;
- Simétrica: Se $A \sim B$ então $B \sim A$;
- Transitiva: Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

Qualquer relação com essas propriedades é uma *relação de equivalência*.

- Se dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, também podemos dizer que eles são equivalentes (segundo Cantor).

Definições

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Se A é um conjunto, dizemos que:

- A é finito se existir uma bijeção de A em F_n, para algum n.
  - Nesse caso, dizemos que A tem n elementos ou que a *cardinalidade* de A é n.
  - Consideramos o vazio um conjunto finito.
  - Em outras palavras, dizemos que A é finito se $A \sim F_n$ ou se $A = \varnothing$.
- A é infinito se A não for finito.
- A é enumerável se $A \sim \mathbb{N}$.
- A é no máximo enumerável se A for finito ou enumerável.
- A é infinito não enumerável se A não for finito nem enumerável.

Note que um conjunto enumerável é infinito.

Exemplos

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um conjunto enumerável.

- O conjunto $\mathcal{P} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ é enumerável.

  A função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

- O conjunto $\mathcal{I} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é enumerável.

  A função $f : \mathbb{N} \to \mathcal{I}$ dada por $f(n) = \frac{1}{n}$ é bijetora.

$\mathbb{Z}$ é enumerável

Vamos provar que o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, é enumerável.

(Precisamos encontrar uma função bijetora que leva $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$.)

Uma possibilidade é a função f que associa os números da seguinte maneira:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \end{array}$$

Determine uma expressão para essa $f : N \to \mathbb{Z}$.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Uma observação interessante

Quando lidamos com conjuntos finitos, se um conjunto A é um *subconjunto próprio* de B, isto é, se $A \subset B$ e $A \neq B$, então A tem uma quantidade de elementos <u>menor</u> do que B.

Entretanto, com conjuntos infinitos pode acontecer

$$A \subset B, A \neq B \text{ e } A \sim B.$$

Vimos isso nos exemplos

- $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \neq \mathbb{N}$ e $\mathcal{P} \sim \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Esse fato caracteriza os conjuntos infinitos.

Alguns autores usam esta definição alternativa de conjunto infinito:

Um conjunto C é infinito se C contém um subconjunto próprio equipotente a C.

Mais exemplos

(a) $g : \mathbb{N} \to [0,1]$, $g(n) = \dfrac{1}{n}$

- g é injetora, pois $\frac{1}{n} = \frac{1}{m} \iff \frac{m-n}{nm} = 0 \iff m = n$.
- g não é sobrejetora, pois existem números reais x no intervalo $[0,1]$ que não são da forma $\frac{1}{n}$.
- Im $g = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto enumerável.

(b) $h : \mathbb{N} \to [0,1]$, $h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par },\\ 1 & \text{se } n \text{ é ímpar }. \end{cases}$

- h não é injetora nem sobrejetora.
- Im $h = \{0,1\}$ é um conjunto finito.

Pode uma função com domínio $\mathbb{N}$ ter um conjunto infinito não enumerável como imagem?

Sequências

Uma *sequência* é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Se $f : \mathbb{N} \to A$, denotamos $f(n) = a_n$.

Os valores a_n são chamados termos da sequência.

Notações:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n)_n$$

Uma sequência é uma lista de seus termos em uma certa ordem: a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, e assim por diante.

Exemplos:

- $(1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$ $\qquad a_n = 2^n$
- $(1, 2, 1, 2, \dots)$ $\qquad a_n = 1$, se n é ímpar, e $a_n = 2$, se n é par

Sequências e enumerabilidade

Os elementos de um conjunto enumerável podem ser listados (enumerados!) em uma sequência.

- Seja A um conjunto enumerável.
- Então existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$.
- Definindo $a_n = f(n)$, vemos que essa bijeção nada mais é do que a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$
- Portanto, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$

No caso do conjunto $\mathbb{Z}$, com a função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ que vimos anteriormente, temos $\mathbb{Z} = \{0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3,\ \ldots\}$

Um resultado importante

Teorema 1

Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Prova:

- Sejam A um conjunto enumerável e $B \subset A$ um subconjunto infinito.
- Como A é enumerável, seus elementos podem ser colocados em uma sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de termos distintos dois a dois, isto é, $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$.
- Defina
  - n_1: o menor natural tal que $a_{n_1} \in B$.
  - n_2: o menor natural que é maior do que n_1 tal que $a_{n_2} \in B$.
  - n_k: o menor natural que é maior do que n_{k-1} tal que $a_{n_k} \in B$.

Um resultado importante (continuação)

Teorema 1

Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

Continuação da prova:

- O conjunto B pode ser visto como uma sequência

$$B = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$$

  de termos distintos dois a dois. (Por quê?...)
- Defina $f : \mathbb{N} \to B$, $f(k) = a_{n_k}$.
- Então f é injetora e sobrejetora. Logo, B é enumerável.

Esse teorema nos permite afirmar que os conjuntos enumeráveis são conjuntos do "menor tipo de infinito". (Por quê?...)

Uniões e intersecções de conjuntos

Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots$ conjuntos.

A *união* de todos esses conjuntos é denotada por $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \iff x \in E_j, \text{ para pelo menos um } j \in \mathbb{N}.$$

A *intersecção* desses conjuntos é denotada por $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \iff x \in E_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Exemplos

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.
   - cada F_n é um conjunto finito.
   - $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{N}$
   - $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{1\}$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $E_n = \{n\}$.
   - $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{N}$
   - $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$

Exercício

União e intersecção de dois conjuntos enumeráveis:

Sejam $\mathcal{P} = \{2j : j \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{Q} = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$.

- $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} =$
- $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} =$

Note que, na união, não escrevemos os números repetidos!

São enumeráveis esses conjuntos?

União enumerável de conjuntos enumeráveis

Teorema 2

Seja $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis.

Então o conjunto $U = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é enumerável.

Temos duas estratégias para demonstrar que um conjunto é enumerável:

(a) Definir uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em U.
Qual a dificuldade de fazer isto neste caso?

(b) Listar todos os elementos de U organizados em uma sequência.
Temos que encontrar uma forma de fazer isso!

União enumerável de conjuntos enumeráveis (continuação)

- Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} & \dots \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

  - A primeira linha é formada por uma sequência de todos os elementos do conjunto E_1.
  - A segunda linha, por uma sequência dos elementos de E_2, e assim por diante.
- Os elementos da matriz são os elementos do conjunto U.
- Não sabemos quais termos se repetem na matriz.

União enumerável de conjuntos enumeráveis (continuação)

- Vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência (que pode ter repetições):

$$s = (e_{11}, \quad e_{21}, e_{12}, \quad e_{31}, e_{22}, e_{13}, \quad e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \quad \ldots)$$

  - Qual a regra de formação da sequência s?

- Conseguimos escrever <u>todos</u> os elementos da matriz em forma de uma sequência! Portanto, existe uma função (a sequência s) que associa os números $1, 2, 3, \ldots$ respectivamente a $e_{11}, e_{21}, e_{12}, e_{31}, e_{22}, e_{13}, e_{41}, e_{32}, e_{23}, e_{14}, \ldots$ (nessa ordem!)
- A imagem de s é o conjunto U.
- Como o domínio de s é $\mathbb{N}$, sua imagem é no máximo enumerável.
- Mas U é um conjunto infinito (por quê?), pois $U \supset E_1$ e E_1 é infinito.

Portanto, pelo Teorema 1, U é enumerável.

Consequências

Corolário 1

A união finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Corolário 2

Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são conjuntos finitos ou enumeráveis, então $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ é no máximo enumerável.