# PESQUISA OPERACIONAL I

**Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho**
**Profa. Dra. Catarina Barbosa Careta**
Depart. de Economia, Administração e Sociologia
ESALQ - Universidade de São Paulo

# PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho

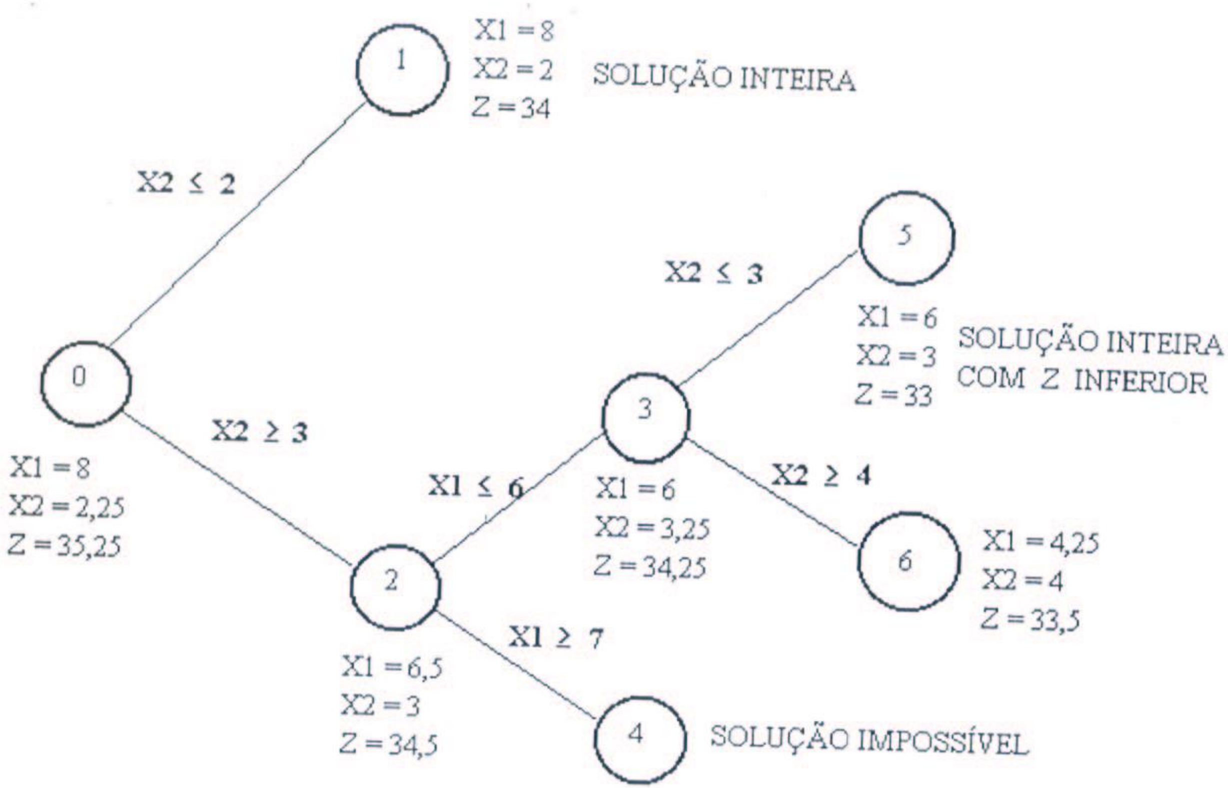
Programação linear inteira, ou simplesmente **programação inteira**, é uma variação da programação linear, que também é adequada para solução de problemas que envolvam programação mista (estrutura linear com características inteiras e não-inteiras), particularmente para problemas que envolvam escolhas que possam ser representadas por variáveis binárias tipo zero-um.

De uma maneira geral, o problema passível de solução por programação inteira deve apresentar as seguintes características:

a) função objetivo linear;
b) restrições lineares;
c) variáveis positivas;
d) algumas (ou todas) variáveis inteiras.

Se não houvesse um algoritmo específico para a resolução de problemas que demandem a utilização de programação inteira, poderia ser tentada como alternativa o *arredondamento* (para cima ou para baixo?) da solução obtida por programação linear. Os riscos envolvidos diriam respeito à possibilidade da solução arredondada, mesmo que viável, não corresponder à solução ótima; ou ainda ao fato de se violar as restrições originalmente impostas ao problema. Também seria viável uma pesquisa *gráfica* sobre os candidatos à solução inteira, particularmente para problemas que envolvessem duas ou até três varíáveis, para a obtenção da solução ótima do problema.

# MÉTODO *BRANCH-AND-BOUND*



# MÉTODO *BRANCH-AND-BOUND*

O método "Branch-and-Bound" (Algoritmo de Bifurcação e Limite) é o mais disseminado para problemas de programação inteira, com os seguintes passos a serem observados:

1) Resolva o problema como se fosse um problema trivial de programação linear, com as variáveis relaxadas. Examine a solução relaxada ótima obtida e verifique se as variáveis que deveriam ser inteiras observam efetivamente valores inteiros. Em caso positivo, o problema (por coincidência) está resolvido. Se não, siga para o próximo passo.

2) Se a solução obtida contém uma variável não-inteira, por exemplo, $x_j^*$, então $i_1 < x_j^* < i_2$ , onde $i_1$ e $i_2$ são inteiros consecutivos e não negativos. Dois novos modelos de programação inteira são então criados, acrescentando ao problema de programação inteira original ou a restrição $x_j \leq i_1$ ou $x_j \geq i_2$.

3) Se alguma das primeiras aproximações continuar a apresentar soluções não-inteiras, o problema de programação inteira originado por esta primeira aproximação torna-se candidato a uma bifurcação adicional.

4) Se o problema for de maximização, a bifurcação continua até ser obtida uma primeira aproximação inteira (que é uma solução, não necessariamente ótima, do problema original). O valor da função objetivo correspondente a esta primeira aproximação inteira torna-se um limite inferior para o problema. Todos os modelos cujas primeiras aproximações, inteiras ou não, conduzam a valores da função objetivo menores que o limite inferior, devem ser descartados.

5) Se o problema for de minimização, o procedimento permanece o mesmo, exceto que os limites a serem utilizados deverão ser "superiores" e não mais inferiores. Assim, o valor da função objetivo a partir da primeira solução inteira torna-se o limite superior do problema, sendo que deverão ser eliminados aqueles modelos com valores da função objetivo maiores que o limite superior corrente.

# ARTIFÍCIOS EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA

**Restrições tipo "ou/ou"**

Exemplo: Um produtor considera dois mercados alternativos para alocar a sua produção de milho, trigo e de sorgo: ração para aves ou ração para bovino de corte. Como os processos de produção diferem entre si, as restrições pertinentes são distintas. A saber:

$2x1 + 4x2 + x3 \leq 30$ (ração para aves)
$10x1 + 8x2 \leq 180$ (ração para bovinos)
onde:
$x1$ = kg de milho
$x2$ = kg de trigo
$x3$ = kg de sorgo

Artifício: utilizar variável inteira tipo zero-um nos RHS das restrições, ou seja,

$2x1 + 4x2 + x3 \leq 30 + y\,M$ (ração para aves)
$10x1 + 8x2 \leq 180 + (1 - y)\,M$ (ração para bovinos)
onde:
$y$ = variável inteira tipo zero-um
$M$ = um valor positivo arbitrário, excessivamente alto.

Assim, se $y = 0$, a restrição correspondente a "ração para aves" se torna atuante, enquanto a restrição para "ração bovina" se torna redundante; se $y = 1$, a situação anterior se inverte.

# ARTIFÍCIOS EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA

## Restrições tipo “pelo menos K de R restrições devem ser válidas”

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\le 10 \\
4x_1 + x_2 - x_3 &\le 12 \\
x_2 + 2x_3 &\le 8 \\
3x_1 - x_2 + x_3 &\le 9
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{ARTIFÍCIO}} \quad
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\le 10 + y_1 M \\
4x_1 + x_2 - x_3 &\le 12 + y_2 M \\
x_2 + 2x_3 &\le 8 + y_3 M \\
3x_1 - x_2 + x_3 &\le 9 + y_4 M
\end{aligned}
$$

onde:
$y_i$ = variável inteira tipo zero-um
M = um valor positivo arbitrário, excessivamente alto.

Por exemplo, se as restrições são mutuamente exclusivas (somente uma das quatro é válida),

y1 + y2 + y3 + y4 = 3;

ou, se pelo menos três das restrições devem atuar:

y1 + y2 + y3 + y4 = 1

# ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Quanto à análise de sensibilidade, lembre-se que em programação linear, a adição de 1 unidade ao RHS de uma restrição que tem folga não afetará a solução ótima. Já em programação inteira, uma restrição pode ter folga devido unicamente à condição inteira das variáveis.

Em programação linear, qualquer alteração na solução a partir da mudança no RHS observa um comportamento contínuo; já em programação inteira, não há mudança até que uma nova solução inteira se torne viável. Assim, a alteração observa um comportamento não discreto, não contínuo.

# EXERCÍCIO

Uma companhia agrícola está considerando seis possíveis oportunidades para investimento. A tabela a seguir apresenta as informações necessárias para cada projeto.

| Projeto | Despesa inicial ($ 000) | Pessoal necessário (unid.) | Capital de giro médio anual ($ 000) | Lucro anual estimado ($ 000) | Valor presente ($ 000) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 700 | 6 | 200 | 160 | 300 |
| 2 | 1080 | 16 | 300 | 240 | 440 |
| 3 | 120 | 2 | 20 | 36 | 60 |
| 4 | 300 | 4 | 70 | 66 | 160 |
| 5 | 680 | 10 | 150 | 140 | 380 |
| 6 | 420 | 6 | 90 | 80 | 200 |
| Exig. | Máximo de 2000 | Máximo de 24 | Mínimo de 200 | Mínimo de 200 | Máximo possível |

Além disso, sabe-se de antemão que os projetos 3 e 4 são mutuamente exclusivos e que o projeto 1 só pode ser realizado em conjunção com o projeto 6. Identifique os projetos que devem ser selecionados pela companhia agrícola.

**Objetivo:** maximização do valor presente

**Alternativas:** seleção dos projetos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 ($x_1, \ldots, x_6$), representada por variáveis inteiras tipo 0-1.

**Restrições:** - despesa inicial máxima
- disponibilidade máxima de pessoal
- lucro anual mínimo
- necessidade de capital de giro médio anual mínimo
- os projetos 3 e 4 são mutuamente exclusivos
- o projeto 1 só pode ser realizado em conjunto com o projeto 6

O modelo matemático pode ser descrito como segue:

$\text{Max } Z = 300x_1 + 440x_2 + 60x_3 + 160x_4 + 380x_5 + 200x_6$
sujeito a
$700x_1 + 1080x_2 + 120x_3 + 300x_4 + 680x_5 + 420x_6 \leq 2000$
$6x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 6x_6 \leq 24$
$200x_1 + 300x_2 + 20x_3 + 70x_4 + 150x_5 + 90x_6 \geq 200$
$160x_1 + 240x_2 + 36x_3 + 66x_4 + 140x_5 + 80x_6 \geq 200$

- os projetos 3 e 4 são mutuamente exclusivos

| $x_3$ | $x_4$ | **Pode ou não pode?** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | NÃO |
| 1 | 0 | SIM |
| 0 | 1 | SIM |
| 0 | 0 | SIM |

Portanto, $x_3 + x_4 \leq 1$

- o projeto 1 só pode ser realizado em conjunção com o projeto 6

| $x_1$ | $x_6$ | **Pode ou não pode?** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | SIM |
| 1 | 0 | NÃO |
| 0 | 1 | SIM |
| 0 | 0 | SIM |

Portanto, $x_6 - x_1 \geq 0$

**Objetivo:** maximização do valor presente

**Alternativas:** seleção dos projetos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 ($x_1, \ldots, x_6$), representada por variáveis inteiras tipo 0-1.

**Restrições:** - despesa inicial máxima
- disponibilidade máxima de pessoal
- lucro anual mínimo
- necessidade de capital de giro médio anual mínimo
- os projetos 3 e 4 são mutuamente exclusivos
- o projeto 1 só pode ser realizado em conjunto com o projeto 6

O modelo matemático pode ser descrito como segue:

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 440x_2 + 60x_3 + 160x_4 + 380x_5 + 200x_6$$

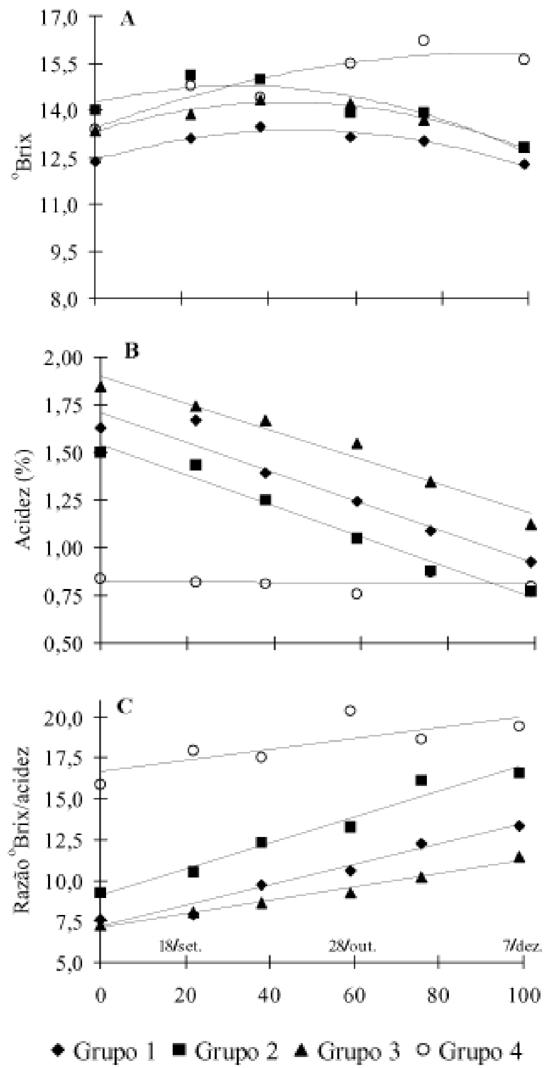
sujeito a

$$700x_1 + 1080x_2 + 120x_3 + 300x_4 + 680x_5 + 420x_6 \leq 2000$$
$$6x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 + 6x_6 \leq 24$$
$$200x_1 + 300x_2 + 20x_3 + 70x_4 + 150x_5 + 90x_6 \geq 200$$
$$160x_1 + 240x_2 + 36x_3 + 66x_4 + 140x_5 + 80x_6 \geq 200$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_6 - x_1 \geq 0$$

Solução ótima: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$ e $Z = \$\ 940{,}00$.

# PROGRAMAÇÃO DE COLHEITA

# Exemplos de curvas de maturação de citrus (Fonte: Mattos-Junior, Gonzales, Pompeu-Junior e Parazzi, 1999)




**Diagramas de dispersão das médias observadas de °Brix, acidez e relação °Brix/acidez nas seis datas de coletas de frutos, e correspondentes gráficos de linhas polinomiais ajustadas, para os quatro grupos de clones e cultivares de laranja determinados pela análise de agrupamento.**

# O CASO DA CANA-DE-AÇÚCAR

Interessado na otimização de sua programação de colheita, um determinado produtor de cana-de-açúcar organiza sua programação de colheita levando em consideração o teor de sacarose das variedades de cana plantadas. Basicamente, vem se orientando de acordo com a seguinte estrutura de modelagem:

Maximizar R

sujeito a

$CRONOTAL_i = 1{,}0$

Sabe-se que:

a) <u>em termos da função objetivo</u>:

R = receita a ser auferida pela comercialização do açúcar, em função do teor de sacarose, em US$, sendo que:

$$R = PS \times \sum_i \sum_j PRO_{ij} \times TS_{ij} \times C_{ij}$$

onde

PS = preço do kg de sacarose, estimado em US$ 4.30;
$PRO_{ij}$ = produtividade do talhão i, no mês j, em toneladas de cana;
$TS_{ij}$ = teor de sacarose, medido a partir da curva de maturação, no talhão i, no mês j, em kg/t;
$C_{ij}$ = variável tipo 0-1, representando a possibilidade do talhão i ser colhido no mês j.

b) <u>em termos das restrições</u>:

$CRONOTAL_i = 1{,}0$
sendo que:
$CRONOTAL_i$ = cronograma de colheita para o talhão i, em termos da alocação do melhor mês, durante a safra, para a sua colheita, onde

$$CRONOTAL_i = \sum_j C_{ij}$$

Os dados que vêm sendo utilizados dizem respeito a valores observados na última safra.

Assim sendo, a Tabela 1 fornece as informações, ao nível de talhão, em termos de produtividade de cana a ser esperada, por talhão, em função do mês de colheita. Na Tabela 2 são mostradas as faixas observadas em cada mês, por talhão, em termos de teor de sacarose.

***Tabela 1*** - Produtividade de cana (t), por talhão

| Talhão/Mês | Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2050 | 2150 | 2300 | 2500 |
| 2 | 3800 | 4000 | 4200 | 4300 |
| 3 | 1300 | 1500 | 1600 | 1700 |

***Tabela 2*** - Teor de sacarose (kg/t), por talhão

| Talhão/Mês | Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | 81 | 82 | 83 |
| 2 | 64 | 72 | 65 | 60 |
| 3 | 78 | 79 | 76 | 75 |

O principal resultado a ser obtido a partir do modelo é o cronograma propriamente dito da colheita, a ser representado por todos os $C_{ij} = 1$ , ou seja, em quais meses (j) quais talhões (i) devem ser colhidos.

Pede-se:

a) montar as equações e inequações pertinentes ao modelo, em função dos dados fornecidos;

b) "imaginar" e justificar uma possível resposta - cronograma de colheita - para o problema.

a)

$$\text{Max } R = 4{,}3\,(2.050 \times 80 \times C_{11} + 2.150 \times 81 \times C_{12} + 2.300 \times 82 \times C_{13} + 2.500 \times 83 \times C_{14} + 3.800 \times 64 \times C_{21} + 4.000 \times 72 \times C_{22} + 4.200 \times 65 \times C_{23} + 4.300 \times 60 \times C_{24} + 1.300 \times 78 \times C_{31} + 1.500 \times 79 \times C_{32} + 1.600 \times 76 \times C_{33} + 1.700 \times 75 \times C_{34})$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{4} C_{ij} = 1 \qquad \text{onde } i = 1, 2 \text{ e } 3$$

$$C_{ij} \geq 0$$

b)

TABELA 1. Total de sacarose (kg) por talhão i, no mês j.

| TALHÃO/ MÊS | Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 164.000 | 174.150 | 188.000 | 207.500 |
| 2 | 243.200 | 288.000 | 273.000 | 258.000 |
| 3 | 101.400 | 118.500 | 121.600 | 127.500 |

1ª opção - mês de maior produção de sacarose em cada talhão

| Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|
| -------- | talhão 2 | -------- | talhão 1 e talhão 3 |

$C_{22} = C_{14} = C_{34} = 1$ ; Produção de sacarose = 623.000 kg e Receita = $ 2.678.900,00

2ª opção - talhão com maior produção de sacarose em Set, Out e Nov

| Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|
| talhão 2 | talhão 1 | talhão 3 | -------- |

$C_{21} = C_{22} = C_{23} = 1$ ; Produção de sacarose = 538.950 kg e Receita = $ 2.317.485,00

3ª opção - talhão com maior produção em Out, Nov e Dez

| Set | Out | Nov | Dez |
|---|---|---|---|
| -------- | talhão 2 | talhão 1 | talhão 3 |

$C_{22} = C_{23} = C_{24} =1$ ; Produção de sacarose = 434.300 kg e Receita = $ 1.867.490,00

# EXERCÍCIO DE “LIÇÃO DE CASA”

Resolva o mesmo problema de programação de colheita de cana, admitindo/adicionando que a usina tenha que colher um mínimo de 1.800 toneladas nos meses de setembro a dezembro (entregar em uma folha A4 a estrutura matemática do modelo e a solução obtida – até às 19h do dia 08/10, próxima quinta-feira).

# Referência


- CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais**. São Paulo: Atlas, 2015.