LISTA 8 - CLASSE

1) Sejam $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ varáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Cauchy padrão. Qual a função característica da média amostral $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$?

Solução

Se Y_1 tem distribuição de Cauchy, temos

$$E[e^{itY}] = \frac{1}{\Pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}cos(tx)dx = e^{-|t|}$$

e

$$E[e^{it\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}] = E[\prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{i\frac{t}{n}Y_i}] = \prod_{i=1}^{n} e^{-|\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}$$

então $\overline{Y}_n \sim Cauchy$.

2) Se X é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, qual sua função característica, qual a média e a variância de X?

Solução:

Se $X \sim P(\lambda)$, temos, $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\varphi_X(t) = \Sigma_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X=k) =$$

$$\Sigma_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda}\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})}.$$

$$\varphi'_X(t) = \lambda e^{it} i e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\varphi'_X(0) = \lambda i = iE[X] \leftrightarrow E[X] = \lambda$$

$$\varphi''_X(t) = \lambda i^2 e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + \lambda e^{it} i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\varphi''_X(0) = \lambda i^2 + \lambda^2 i^2 = (\lambda + \lambda^2) i^2$$

$$i^2 E[X^2] = (\lambda+\lambda^2)i^2 \leftrightarrow E[X^2] = (\lambda + \lambda^2)$$

Portanto a variância de X é

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

3) a) Se X tem distribuição binomial de parâmetros n e p, qual a função característica de X? medskip b)Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuições binomiais de parâmetros n, p e m, p, respectivamente. Utilize funções características para encontrar a distribuição de $X + Y$.

Solução: a)

$$\varphi_X(t) = \Sigma_{k=1}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\Sigma_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} = [(pe^{it}(1-p)]^n.$$

b) Observe que $\varphi_X(t) = [(pe^{it}(1-p)]^n$ e que $\varphi_Y(t) = [(pe^{it}(1-p)]^m$. Portanto

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}].E[e^{itY}] = [(pe^{it}(1-p)]^n.[(pe^{it}(1-p)]^m = [(pe^{it}(1-p)]^{n+m}$$

que é a função característica da distribuição binomial com parâmetros $m + n$ e p.