FUNCÕES CARACTERÍSTICAS

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Outubro de 2020

Funções características

Se a e b são constantes reais, $z = a + ib$, onde $i = \sqrt{-1}$ define um número complexo. O conjugado de z é $\bar{z} = a - ib$. O produto $z\bar{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ define a norma de z.

Se uma função real tem expansão em série de potência com raio de convergência positivo, podemos usar série de potência para definir uma função de variável complexa.

O desenvolvimento de Taylor, em torno de um ponto a, de uma função $g(.)$ infinitamente diferenciável é

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(a) \frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Funções características

O desenvolvimento da funão exponencial, $g(t) = e^t$, em torno do ponto 0 é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

e definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

para qualquer número complexo z.

Funções características

Temos $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2. em particular se $z = e^{it}$

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} ...$$

$$= (1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - ...) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ...\right) = cos(t) + isen(t).$$

Funções características

Temos

$$cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{e} \qquad sen(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Temos também que

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it}e^{-it}} = \sqrt{(cos(t) + isen(t))(cos(t) - isen(t))} =$$

$$\sqrt{cos^2(t) + sen^2(t)} = 1.$$

Funções características

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções de t a valores reais, então $h(t) = f(t) + ig(t)$ define uma função complexa em t com $h'(t) = f'(t) + ig'(t)$.

Exemplo 1

$$e^{zt} = e^{at+ibt}.$$

e

$$(e^{zt})' = (e^{at+ibt})' = (e^{at}e^{ibt})' = (e^{at}(cos(bt) + isen(bt)))' =$$

$$(e^{at}cos(bt) + ie^{at}sen(bt))' =$$

$$(ae^{at}cos(bt) - be^{at}sen(bt) + i\left(ae^{at}sen(bt) + be^{at}cos(bt)\right) =$$

$$e^{at}[a(cos(bt) + isen(bt)) + ib(cos(bt) + isen(bt))]$$

$$= e^{at}[(a+ib)e^{ibt}] = (a+ib)e^{at+ibt} = ze^{zt}.$$

Funções características

Ou seja, $(e^{zt})' = ze^{zt}$. e

$$(e^{it})' = ie^{it}.$$

Se $\int_a^b f(t)dt$ e $\int_a^b g(t)dt$ existem, temos

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b f(t)dt + i\int_a^b g(t)dt$$

. e

$$\int_a^b e^{zt}dt = |\frac{e^{zt}}{z}|_a^b = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z},$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Como consequêcia,

$$\int_a^b e^{it}dt = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Funções características

Note que

$$\int_a^b e^{it} dt == \int_a^b cos(t) + isen(t) dt = \int_a^b cos(t) dt + i \int_a^b sen(t) dt$$

$$= sen(t)|_a^b - i.cos(t)|_a^b = (sen(b) - sen(a)) - i(cos(b) - cos(a))$$

$$= \frac{cos(b) - cos(a) + isen(b) - isen(a)}{i} = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Funções características

Se X e Y são varivéis aleatórias (reais), podemos escrever uma v.a. complexa como $Z = X + iY$.

Definição 1

$$E[Z] = E[X] + iE[Y],$$

sempre que $E[X]$ e $E[Y]$ estão bem definidas. Z tem esperança finita se e só se $E|Z| < \infty$ e neste caso $|E[Z]| \leq E|Z|$.

$$E[a_1 Z_1 + a_2 Z_2] = a_1 E[Z_1] + a_2 E[Z_2],$$

é válida onde a_1 e a_2 são números complexos e Z_1 e Z_2 são variáveis aleatórias complexas com esperanças finitas.

Definição 2
Seja X uma v.a. (real), $t \in R$, então $|e^{itX}| = 1$
e $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$, $-\infty < t < \infty$ existe.

Definiremos a função característica de X por $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$.

Propriedades

P1: $\varphi_X(0) = 1$

$$|\varphi_X(t)| = |E[e^{itX}]| \leq E[|e^{itX}|] = E[1] = 1.$$

P2: Se X é degenerada em θ, isto é, $P(X = \theta) = 1$, temos

$$\varphi_X(t) = e^{it\theta},$$

se $\theta = 0$ então $\varphi_X(t) = 1$.

Funções características

P3: X é simétrica, em torno de 0, se $f(x) = f(-x)$

$$P(X \leq x) = P(X \geq -x) = P(-X \leq x) \leftrightarrow X =^D -X$$

então

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E[e^{itX}]} = E[cos(tX) - isen(tX)] =$$

$$E[cos(t(-X)) + isen(t(-X))] = \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t) \leftrightarrow$$

a parte imaginária é zero.

Portanto X é simétrica em torno de zero se e só se $\varphi_X(t)$ é real.

Funções características

P4: Se X é uma v.a. e a, b são constantes reais, então

$$\varphi_{a+bX}(t) = E[e^{it(a+bX)}] = e^{ita}E[e^{itbX}] = e^{ita}\varphi_X(tb)$$

Exemplo 2

Se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - it)x} dx =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} . e^{-(\lambda - it)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Observe que $\lim_{x \to \infty} e^{-(\lambda - it)x} = 0$ pois $\lim_{x \to \infty} e^{-\lambda} = 0$ e e^{-itx} é limitado em x.

Exemplo 3 $Y \sim U(-1,1)$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{itx}}{2} dx = |\frac{1}{2}.\frac{e^{itx}}{it}|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\frac{e^{it} - e^{-it}}{it}) = \frac{sen(t)}{t}.$$

Funções características

Teorema 1
Se $E[|X|^n] < \infty$, então $\varphi_X(t)$ possui n derivadas contínuas e

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x), \;\; k = 1, ..., n$$

e em particular $\varphi_X^k(0) = i^k E[X^k]$

Prova Notas do professor

Funções características

Teorema 2
$\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua, isto é,

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } |t - s| < \delta \to |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \epsilon.$$

Prova

$$|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \leq \int |e^{itx} - e^{isx}| f(x) dx =$$

$$\int |e^{i(t-s)x} - 1 f(x) dx = h(t - s),$$

$h(u) = E[|e^{iux} - 1|]$ e $0 \leq |e^{iux} - 1| \leq 2$.

Funções características

Pelo teorema da convergência dominada

$$\lim_{u \to 0} E[|e^{iux} - 1|] = E[\lim_{u \to 0} |e^{iux} - 1|] = 0.$$

Como $h(.)$ é uma função contínua definida num intervalo compacto (limitado e fechado) então $h(.)$ é uniformemente contínua.

Teorema 3
Se X é uma v.a. e $Y = a + bX$, e $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$\varphi_Y(t) = E[e^{i(a+bX)t}] = E[e^{iat}e^{ibXt}] = e^{iat}E[e^{ibXt}] = e^{iat}\varphi_X(bt).$$

Um resultado importante é

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E[X^n] t^n}{n!}.$$

Funções características

Exemplo 4

$X \sim N(0, \sigma^2)$, então

$$E[X^{2k+1}] = 0 \qquad \text{e} \qquad E[X^{2k}] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} E[X^{2k}] t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sigma^2 t^2/2)^k}{k!} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Funções características

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y = X + \mu$$

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu}\varphi_X(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Fórmula da Inversão

Teorema 4 Seja X uma v.a. com valores nos inteiros, ou seja, $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj} P(X = j)$. Então

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt$$

Funções características

Prova

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj}P(X=j)\right)dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X=j)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt$$

Ocorre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt = \begin{cases} 1 \text{ se } j = k \\ 0 \text{ se } j \neq k \end{cases}.$$

Funções características

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt = e^{i(j-k)t} i(j-k)\frac{1}{2\pi}|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{i(j-k)\pi} - e^{-i(j-k)\pi}}{2\pi i(j-k)} = \frac{sen((j-k)\pi)}{\pi(j-k)} = 0$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt = P(X = k).$$

Funções características

Exemplo 5

Considere uma variável aleatória X com valores inteiros e com função característica $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Qual a sua função de probabilidade.

Utilizando o teorema acima temos que

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} (pe^{it} + 1 - p)^n dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (pe^{it})^j (1 - p)^{n-j} dt =$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (p)^j (1 - p)^{n-j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{itj} dt = \binom{n}{k} (p)^k (1 - p)^{n-k}.$$

Funções características

Observação Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$,

$$\varphi_Z(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Teorema: Fórmula da Inversão
Se X é uma variável aleatória contínua com função característica $\varphi_X(t)$ integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty.$$

Então sua função densidade de probabilidade é

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Exemplo 6

Seja X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty.$$

Estamos interessados em calcular sua função característica $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-x}dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\left(\frac{e^{-itx} + e^{itx}}{2}\right)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} costxdx.$$

Funções características

Contudo, integrando por partes obtemos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} costxdx = 1 - t^2 \int_0^{\infty} e^{-x} costxdx$$

e concluimos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} costxdx = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_X(t).$$

Funções características

Usando a fórmula da inversão, do teorema anterior, temos

$$\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

e concluimos que a distribuição de Cauchy padrão tem função característica $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

Exemplo 7

Se X é uma variável aleatória com distribuição $N(0, \sigma^2)$, a sua função característica é $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, isto é

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se, na expressão acima, substituirmos t por $-t$ e σ por $\frac{1}{\sigma}$, temos

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx,$$

isto é

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} dx.$$