Espaço de Estados (EE)

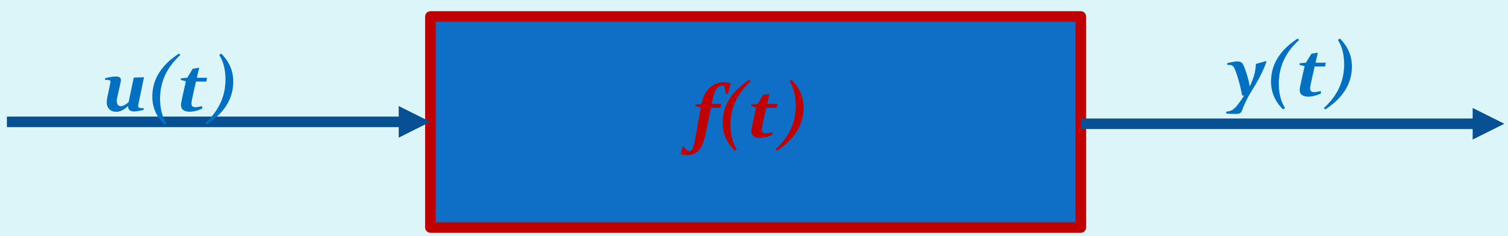
- *Motivação*
- *Conceitos*
  - *Definição*
  - *Variável de Estado*
  - *Trajetória de Estado*
  - *Linearização*
  - *Matrizes Jacobianas*
  - *Transformações lineares*
  - *Formas canônicas*

- *Exemplos*
  - *Modelo da ISO para passageiro*
- *Exercícios para casa*

Espaço de Estados: Motivação

- Sistemas dinâmicos complexos (MIMO, Multivariáveis) exigem em geral ED não-lineares de ordem elevada para sua descrição, cujas soluções são raras e difíceis analítica e mesmo numericamente.
- Mesmo para sistemas lineares de ordem elevada e SISO como os descritos pela EDO:

$$\overset{(n)}{y} + a_1\overset{(n-1)}{y} + a_2\overset{(n-2)}{y} + \cdots \ldots\ldots. + a_{n-2}\ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} + a_n y(t) = u(t)$$



- *A EDO anterior de ordem elevada é matematicamente conveniente para descrever o sistema*
- *No entanto, praticamente ela é ruim no caso numérico porque derivadas sucessivas da variável amplificam os ruídos (imprecisão numérica):*
  - *Quanto maior a ordem mais ruído → mais imprecisa a solução!*
- *Uma solução para este problema é a utilização do Espaço de Estados (EE), onde a equação diferencial de ordem n é transformada num sistema de n-equações diferenciais de primeira ordem:*

Espaço de Estados

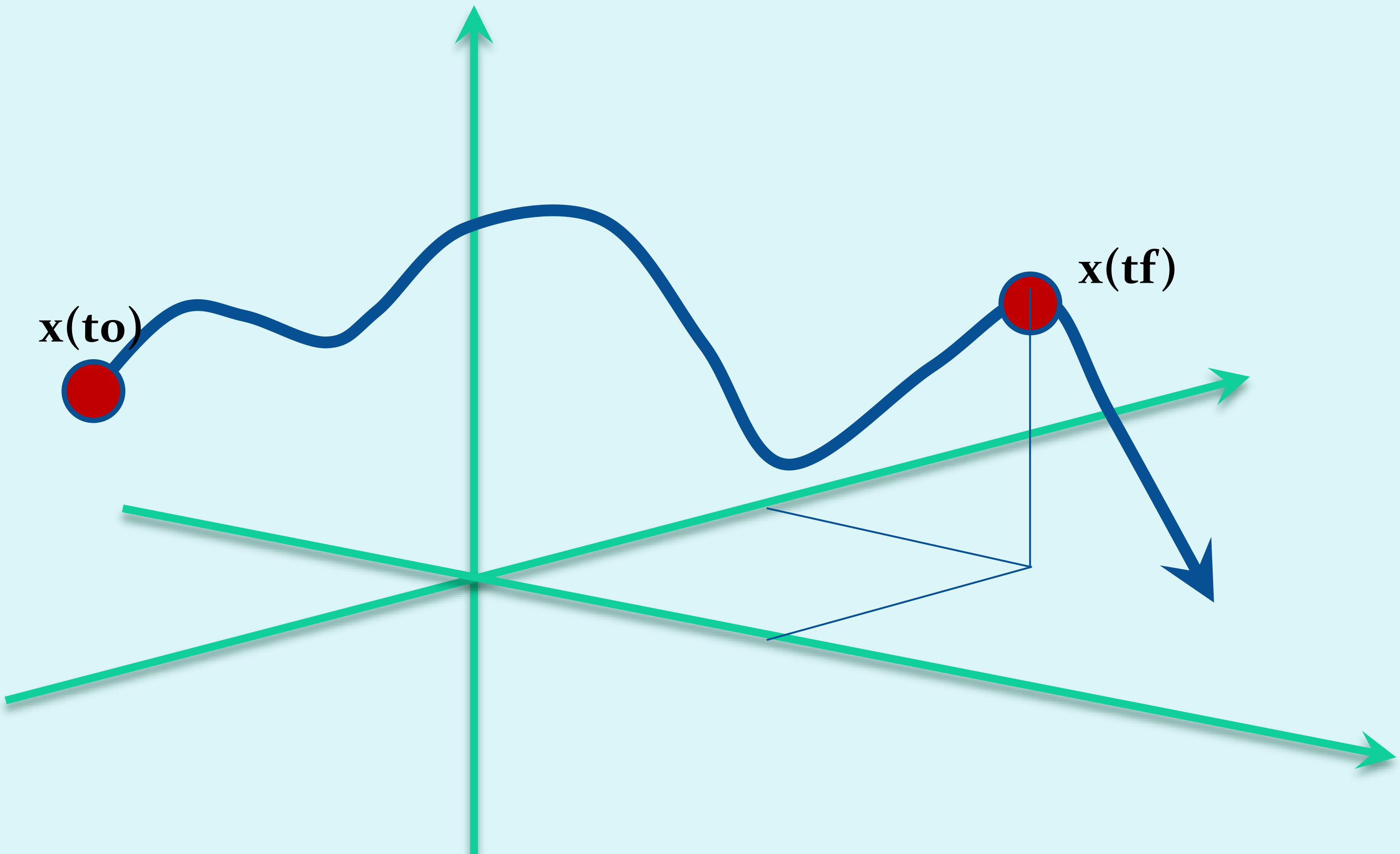
- *Espaço de Estado (**E.E.**):*

  "É o espaço de dimensão n, com n eixos coordenados, cada um deles associados a uma variável de estado. Qualquer vetor **x***(t) é representado por um ponto no* ***E.E.***

  → variando t, o vetor de estados descreve uma trajetória neste espaço, chamada de:

  trajetória de estado."

Trajetória de Estados



Espaço de Estados

- *Estado de um sistema dinâmico:*

  *"É o **menor** conjunto de variáveis de estado cujo conhecimento no instante t=to, juntamente com o conhecimento da entrada **u**(t) para t≥to, determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante t≥to".*

- *Variáveis de estado: podem **não** ter significado físico.*

- Vetor de estados:

  "É o vetor das variáveis de estado:

  $$\mathbf{x}(t) = [\ x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ldots\ldots\ x_n]^T.$$

  Este vetor ***não é único***, mas determina univocamente o estado do sistema **x**(t) para qualquer $t \geq to$, conhecidos **x**(t) e o vetor de entradas **u**($t \geq to$).

Espaço de Estados (continuação)

- **Sistemas não lineares**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) & \longleftarrow \textit{dinâmica} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\underbrace{x_1, x_2 \ldots . x_n}_{\mathbf{x}}, \underbrace{u_1, u_2, \ldots u_r}_{\mathbf{u}}, t) & \longleftarrow \textit{observação (medida)} \end{cases}$$

- **Sistemas lineares (variantes no tempo)**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} & \longleftarrow \textit{dinâmica} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} & \longleftarrow \textit{observação (medida)} \end{cases}$$

- **Sistemas lineares (Invariante no tempo) = SLIT**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} & \longleftarrow \textit{dinâmica} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} & \longleftarrow \textit{observação (medida)} \end{cases}$$

Espaço de Estados (continuação)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}$= [x_1 x_2 x_3 ....x_n] = vetor de Estados

$\mathbf{y}^{\mathbf{T}}$= [x_i x_j x_k ....x_m] = vetor de saídas→ parte medida ou observada de **x**

$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$= [u_1 u_2 u_3 ....u_r] = vetor de entradas

A *[n,n] = Matriz de estados ou matriz da planta do sistema*

B *[n,r}= Matriz de entradas (eventualmente entrada de controle)*

C *[m,n]= Matriz de saídas = v.e. medidas por sensores ou que se quer conhecer.*

D *[m,r]= Matriz de alimentação direta*

Linearização

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\vdots \\
\vdots \\
\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
Saídas: \\
y_1 = g_1(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
y_2 = g_2(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t) \\
\vdots \\
\vdots \\
y_m = g_m(x_1, x_2 \ldots . x_n, u_1, u_2, \ldots u_r, t)
\end{cases}
$$

$$\mathbf{x}^T(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t)........x_n(t)\right]$$

$$\mathbf{y}^T(t) = \left[y_1(t) \quad y_2(t)........y_m(t)\right]$$

$$\mathbf{u}^T(t) = \left[u_1(t) \quad u_2(t)........u_r(t)\right]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2....x_n, u_1, u_2,...u_r, t) \end{bmatrix}$$

Expansão em série de Taylor

- Duas variáveis : x e u.

- Função linearizada ao redor de : $\bar{x}$ e $\bar{u}$

$$f(x,u) \approx f(\bar{x},\bar{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}}(x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}}(u-\bar{u}) +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\bar{x},\bar{u}}(x-\bar{x})^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{\bar{x},\bar{u}}(u-\bar{u})^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}}(x-\bar{x})(u-\bar{u})\right] + \ldots\ldots\ldots}_{O^2}$$

Linearização - Matrizes Jacobianas

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}$$

Linearização - Matrizes Jacobianas

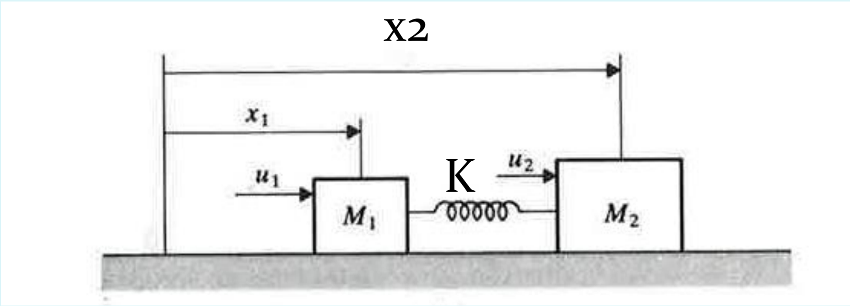
$$A = [n, n] \qquad\qquad B = [n, r]$$

$$C = [m, n] \qquad\qquad D = [m, r]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados (continuação)

Exemplo:



Modelo

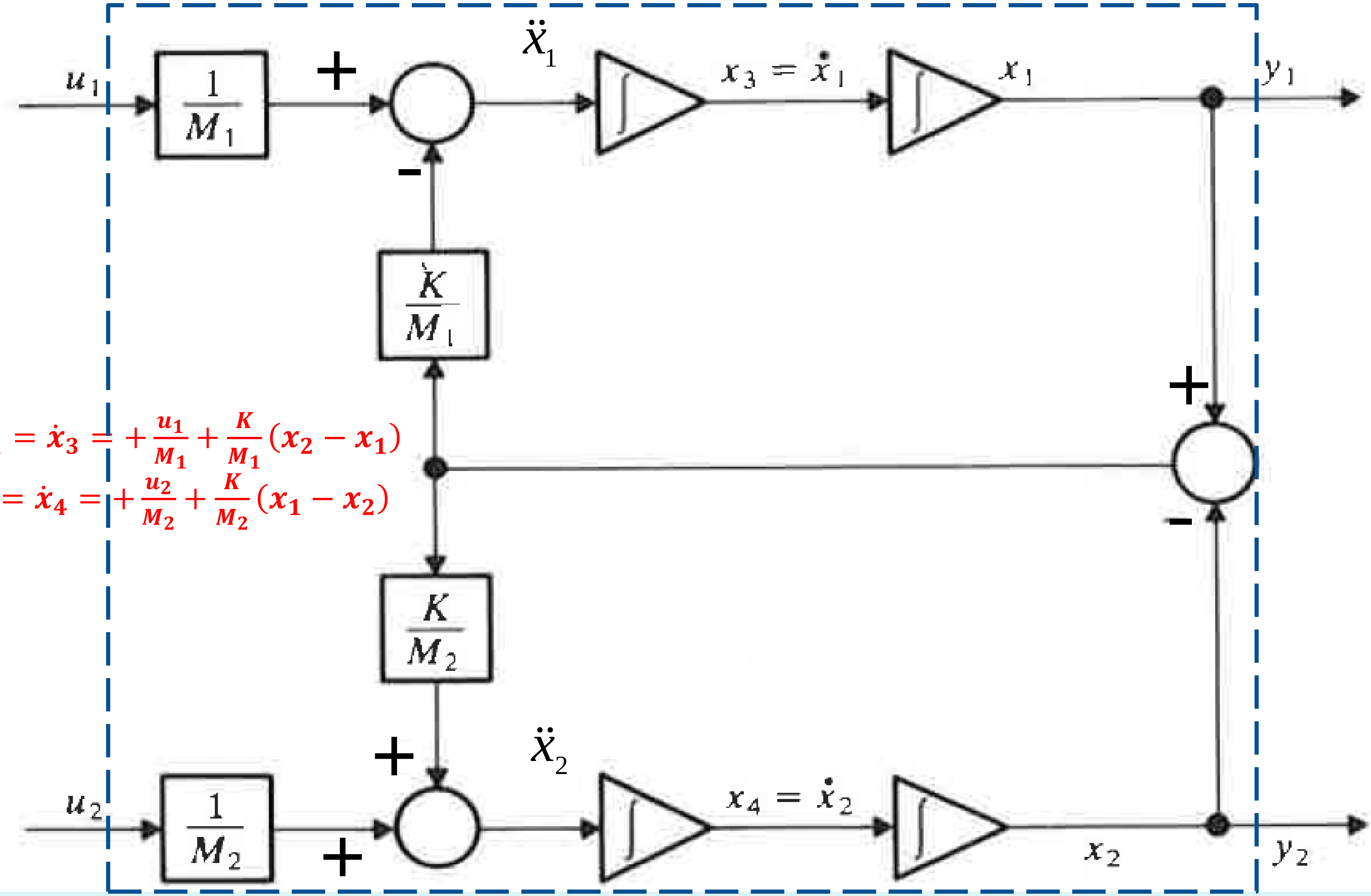
$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{M_1}(x_1 - x_2) = \frac{u_1}{M_1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{M_2}(x_2 - x_1) = \frac{u_2}{M_2}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \left[x_1 \quad x_2 \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x_3}}{\dot{x}_1} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x_4}}{\dot{x}_2}\right]^T \\ \dot{\mathbf{x}} = \left[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \dot{x}_3}}{\ddot{x}_1} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \dot{x}_4}}{\ddot{x}_2}\right]^T \end{cases}$$

Espaço de Estados (continuação)



$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_3 = +\frac{u_1}{M_1} + \frac{K}{M_1}(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{x}_4 = +\frac{u_2}{M_2} + \frac{K}{M_2}(x_1 - x_2)$$

Espaço de Estados (continuação)

$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{M_1}(x_1 - x_2) = \frac{u_1}{M_1}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{M_2}(x_2 - x_1) = \frac{u_2}{M_2}$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2]^T$$

➔Seja : $\dot{x}_1 = x_3$ e $\dot{x}_2 = x_4$

➔ $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^{\mathrm{T}}$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_3 = +\frac{u_1}{M_1} + \frac{K}{M_1}(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{x}_4 = +\frac{u_2}{M_2} + \frac{K}{M_2}(x_1 - x_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K/M_1 & K/M_1 & 0 & 0 \\ K/M_2 & -K/M_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

E supondo que queremos conhecer (ou só podemos medir) apenas a posição dos blocos:

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Espaço de Estados (continuação)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M_1} & \dfrac{K}{M_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{K}{M_2} & -\dfrac{K}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativa : definir o movimento do sistema pelo movimento do centro de massa:

$$\bar{x} = x_G = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M}$$

E a diferença: $\delta = x_1 - x_2$

Espaço de Estados (continuação)

$$\ddot{x} = \frac{u_1 + u_2}{M}$$

$$\ddot{\delta} = -\frac{KM}{M_1 M_2}\delta + \frac{u_1}{M_1} - \frac{u_2}{M_2}$$

E definindo:

$$z = \begin{bmatrix} x & \delta & \dot{x} & \dot{\delta} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \overline{A}z + \overline{B}u \\ y = \overline{C}z \end{cases}$$

Exercício 1 : para casa: Para o novo vetor de estados

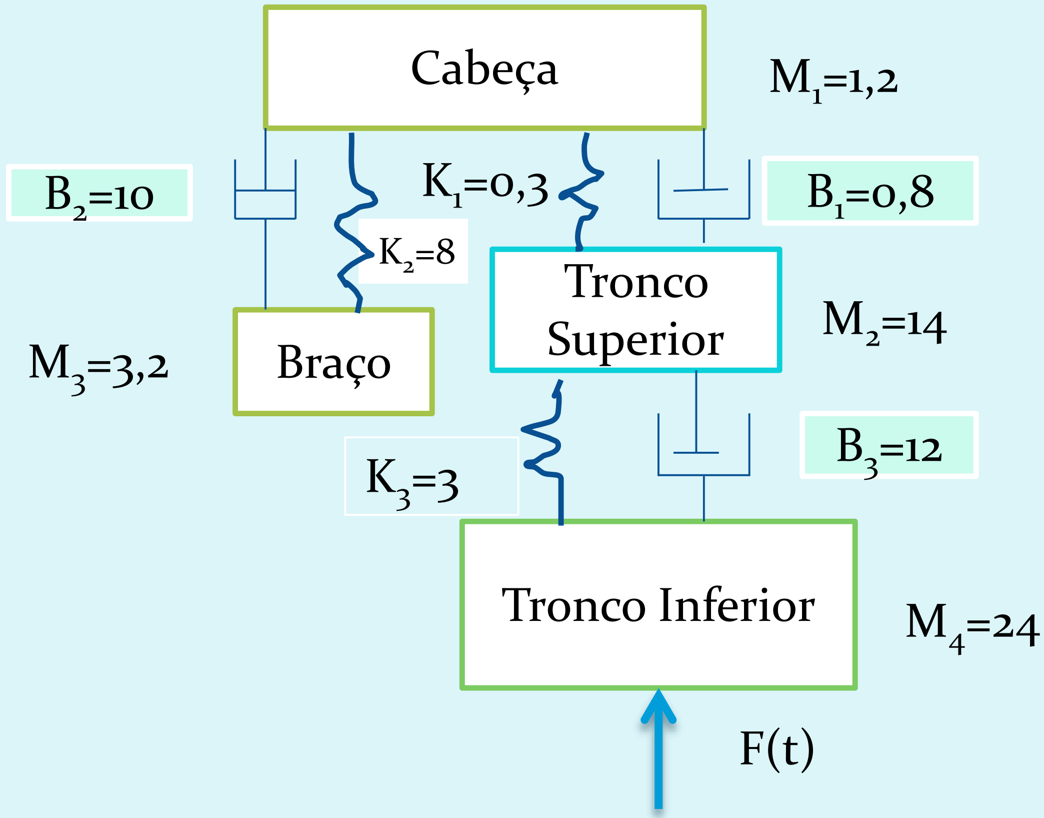
a) mostre que:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{KM}{M_1 M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M} & \dfrac{1}{M} \\ \dfrac{1}{M_1} & -\dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M_2}{M} & 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{M_1}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

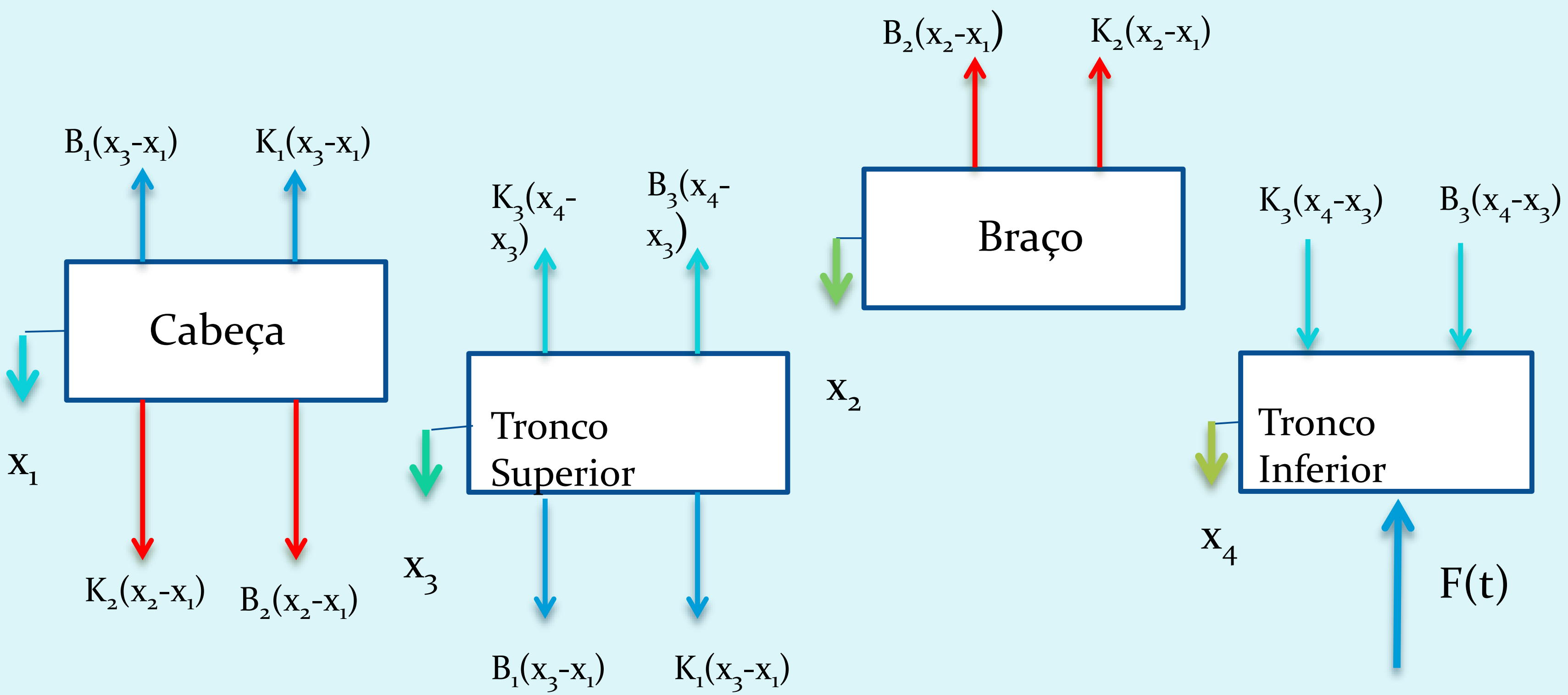
Modelo de passageiro sentado em carro

A ISO adotou um modelo para estudar, por simulação, as características de conforto de uma pessoa sentada em um veículo da seguinte forma:



Modelo de passageiro sentado em carro

- Diagramas de corpo livre



Modelo de passageiro sentado em carro

- Equações de Movimento

- $M_1\ddot{x}_1 = K_1(x_3 - x_1) + B_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + K_2(x_2 - x_1) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$
- $M_2\ddot{x}_2 = -K_2(x_2 - x_1) - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$
- $M_3\ddot{x}_3 = -K_1(x_3 - x_1) - B_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + K_3(x_4 - x_3) + B_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)$
- $M_4\ddot{x}_4 = F(t) - K_3(x_4 - x_3) - B_3(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)$

- Definindo o vetor $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\ ]^T$,

  as equações acima podem ser escritas como:

Modelo de passageiro sentado em carro

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{X} + [K]X = F(t)$$

Onde $[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix}$ é a matriz de massa;

$$[C] = \begin{bmatrix} B_2 + B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & 0 \\ -B_1 & 0 & B_1+B_3 & -B_3 \\ 0 & 0 & -B_3 & B_3 \end{bmatrix}$$

é a matriz de amortecimento

Modelo de passageiro sentado em carro

$$[K] = \begin{bmatrix} K_2 + K_1 & -K_2 & -K_3 & 0 \\ -K_2 & K_2 & 0 & 0 \\ -K_1 & 0 & K_1 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$ é a matriz de rigidez

A representação (M, C, K) é básica no Método dos Elementos Finitos e seus assemelhados (Volumes Finitos, CFD, etc).

Para passar da representação (M, C, K) para Espaço de Estados, defina um vetor estendido y:

$$y = [X \quad \dot{X}]$$

Modelo de passageiro sentado em carro

$$\dot{y} = Ay + Bu \; onde:$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$u = F(t)$$

Transformações Lineares (TL)

- *Não alteram características do sistema:*
  - *Se é estável, permanece estável sob uma TL.*
  - *Mesmos* polos (autovalores)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \text{seja}: x = Tz \end{cases}$$

$$T\dot{z} = ATz + Bu \qquad (1)$$

$$y = CTz$$

multiplicar (1) por T^{-1} a esquerda:

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$

$$y = CTz$$

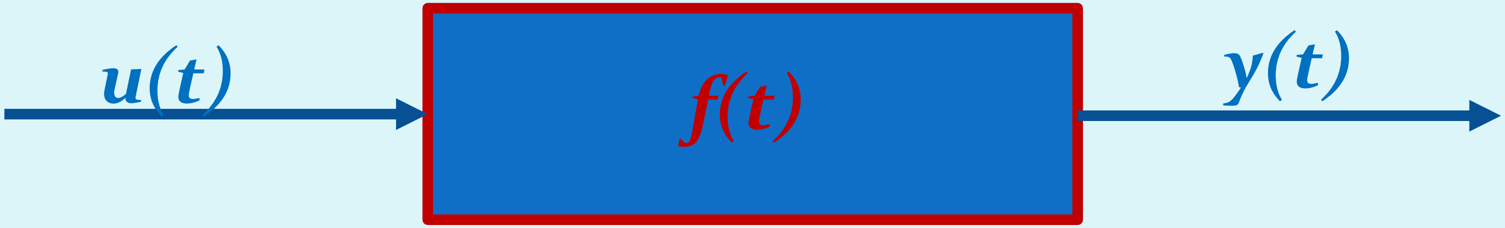
e definindo: $T^{-1}AT = \Lambda; T^{-1}B = \Gamma; CT = \theta$

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \Gamma u \\ y = \theta z \end{cases}$$

Espaço de Estados: forma canônica controlável

Admita um sistema SISO descrito pela EDO abaixo:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + a_2 \overset{(n-2)}{y} + \cdots \ldots \ldots + a_{n-2}\ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} + a_n y(t) = u(t)$$



O sistema pode ser colocado na forma do E.E. com as seguintes mudanças de variáveis:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y = x_1} \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{y} = x_n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x_{n-1}} = x_n \end{array}$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots \ldots \ldots - a_{n-2} x_3 - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + u$$

Espaço de Estados: forma canônica controlável

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \quad 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \quad 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots\cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Espaço de Estados: forma canônica observável

Admita um sistema SISO descrito pela EDO abaixo:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y(t) = b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u(t)$$

$$\overset{(n)}{y} = \underbrace{-a_1 \overset{(n-1)}{y} + b_1 \overset{(n-1)}{u} \underbrace{+ \cdots - a_{n-1}\dot{y} + b_{n-1}\dot{u} \underbrace{- a_n y(t) + b_n u(t)}_{\dot{x}_n}}_{\ddot{x}_{n-1}}}_{\overset{(n)}{x_1}}$$

O sistema pode ser colocado na forma do E.E. com as seguintes mudanças de variáveis:

$\dot{x}_n = -a_n y + b_n u$

$\dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} y(t) + b_{n-1} u(t) + x_n$

$\vdots$

$\vdots$

$\dot{x}_2 = -a_2 y(t) + b_2 u(t) + x_3$

$\dot{x}_1 = -a_1 y(t) + b_1 u(t) + x_2$

$$\overset{(n)}{y} = \overset{(n)}{x_1} \Rightarrow y = x_1$$

Espaço de Estados: forma canônica observável

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

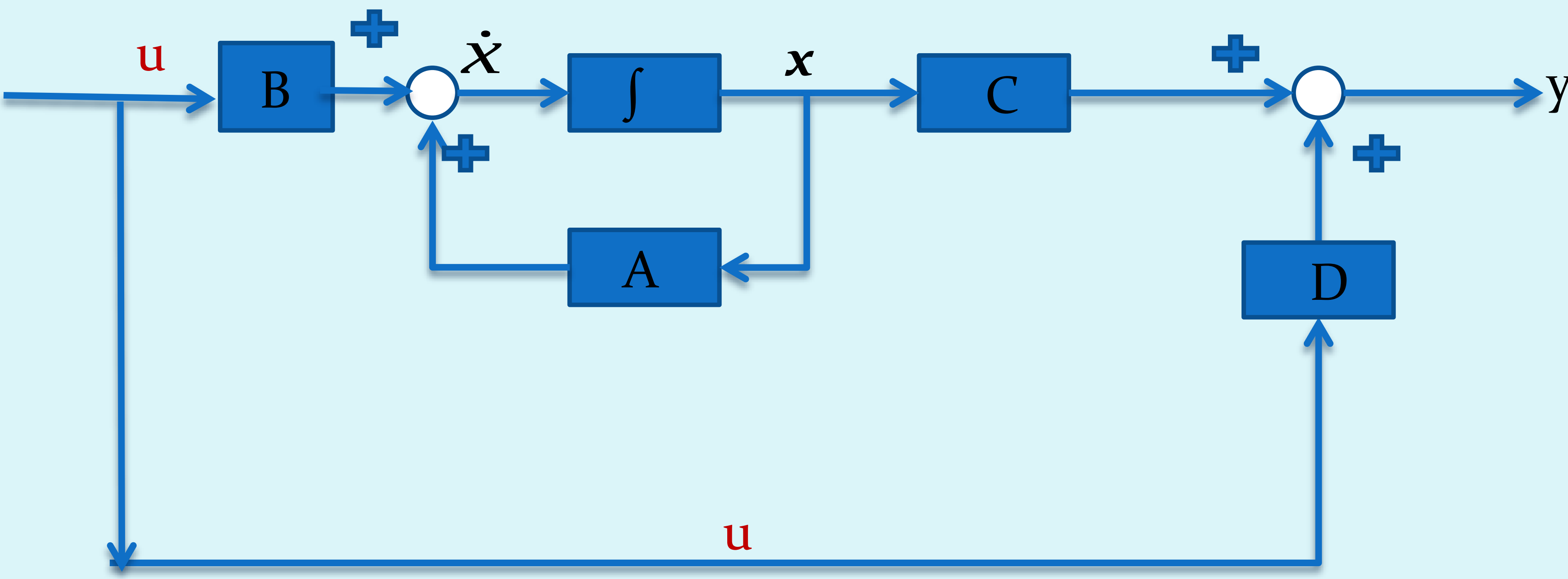
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\, 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\, 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \;\cdots\, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \cdots\cdots\cdots \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

E.E. simulação numérica

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

u= entrada
y = saída



E.E. simulação numérica:

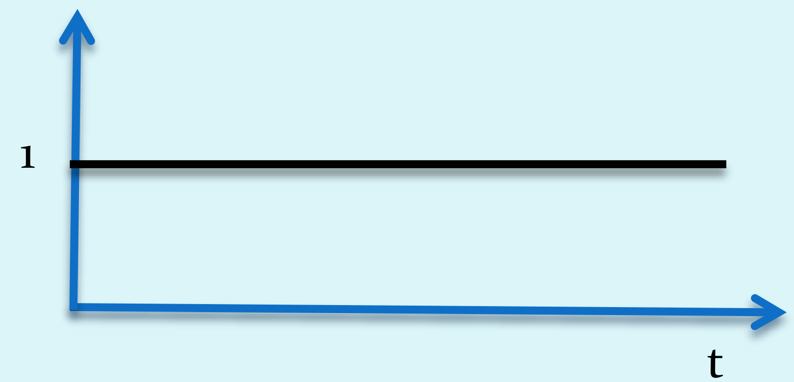
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

- Simulações (Matlab, Scilab)
  - Scilab: Comandos csim:

$$s1 = syslin('c', A, B, C, D)$$

$$[y[,x]] = csim(u, t, sl, [x0[,tol]])$$

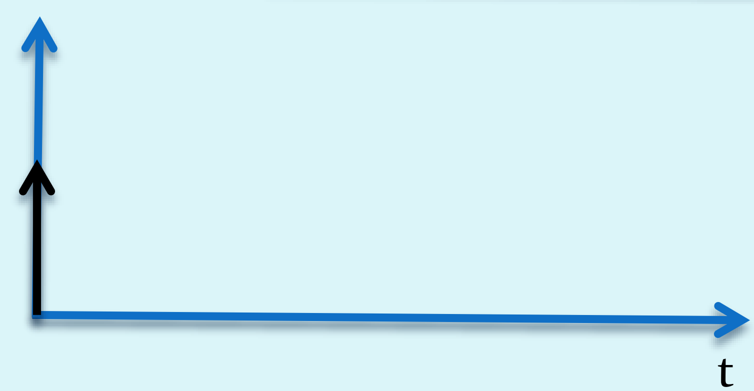
$$u = entrada$$



- Matlab

step(A,B,C,D)

impulse(A,B,C,D)



Exercícios para casa: (para 20/10)

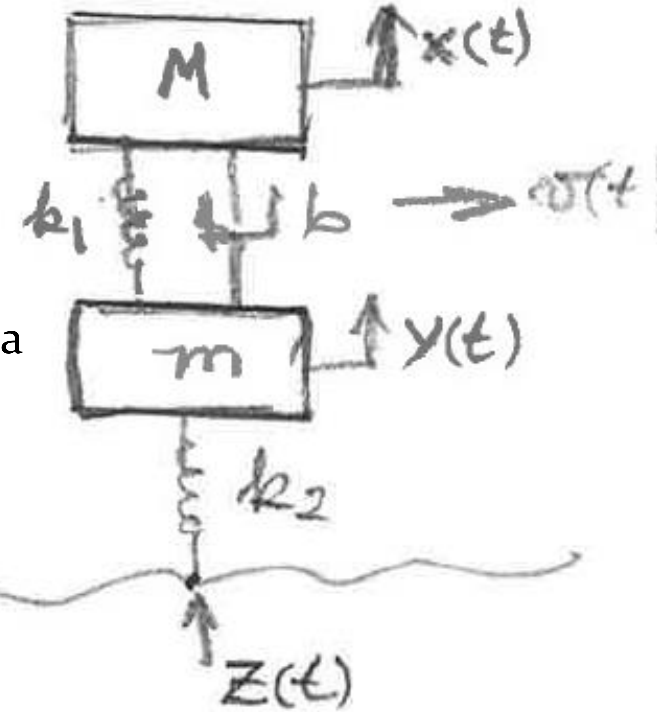
- Colocar no EE:

  Ex.2)

Ex. Modelagem de Suspensão de 1/4 de carro

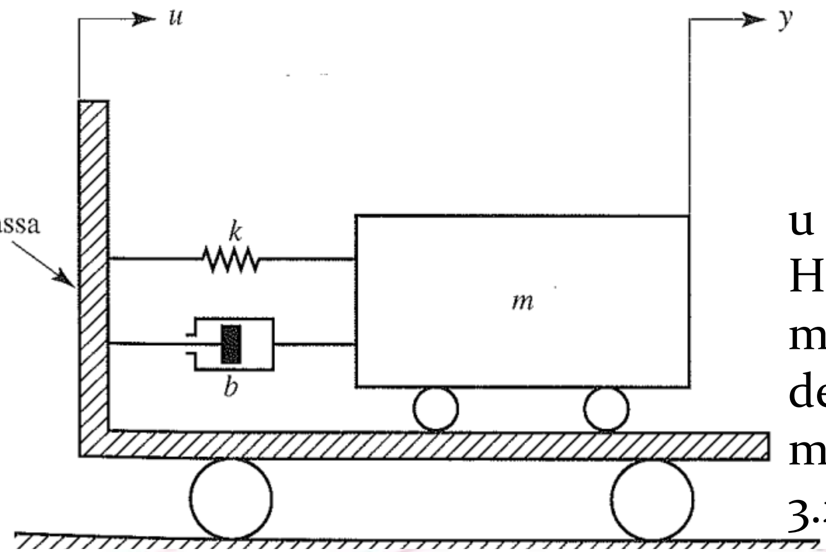
Hipóteses: Elementos puros, lineares.

Admitir que as saídas sejam o deslocamento
do chassi e a velocidade da massa não suspensa
e que a entrada seja o deslocamento z(t)



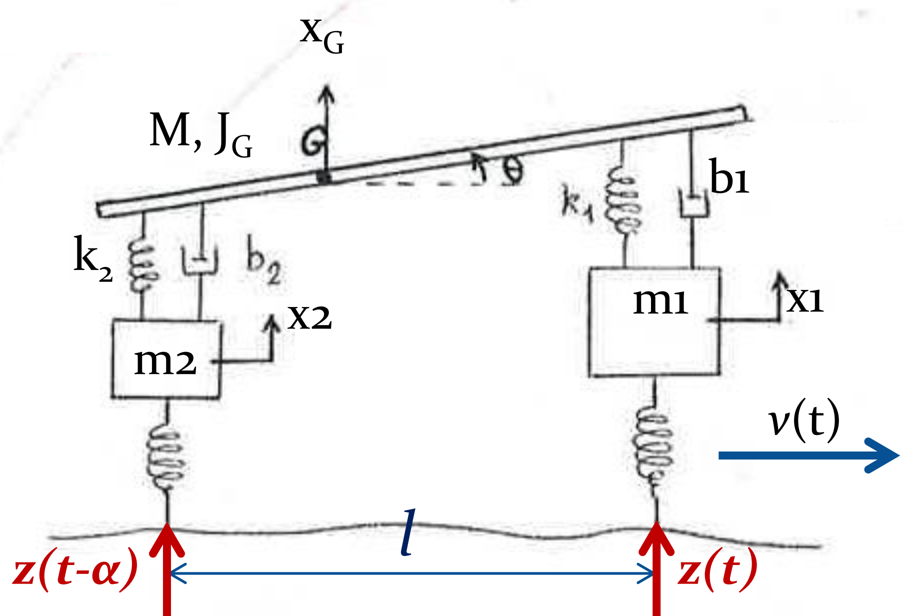
perfil da via

Ex. 3



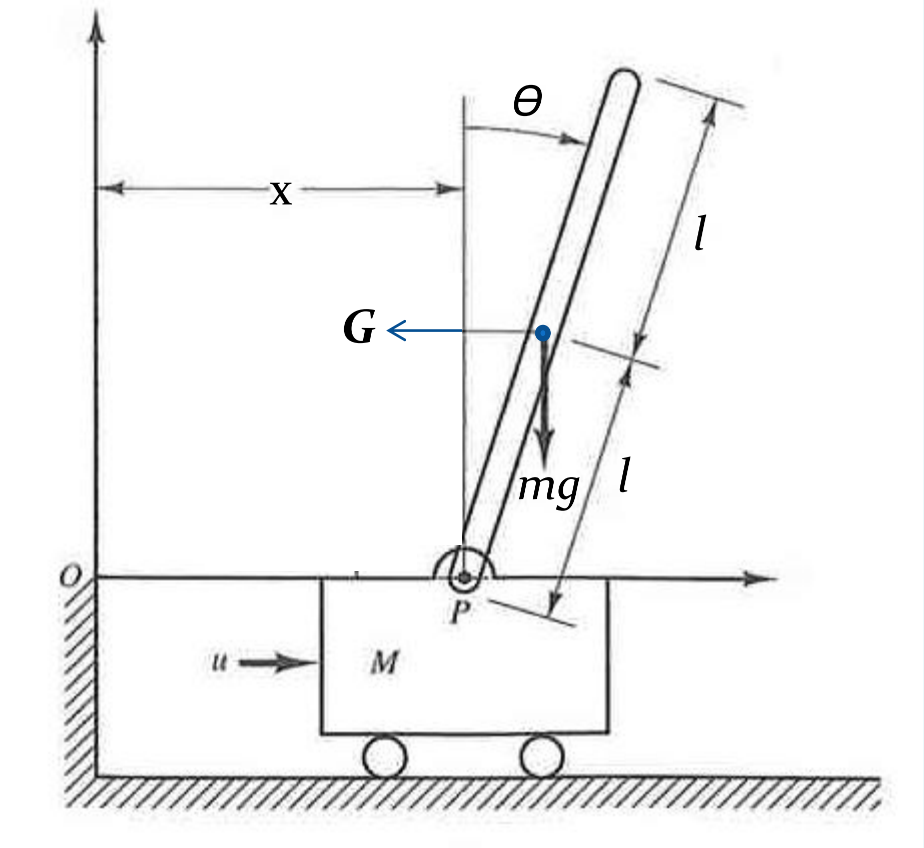
u → força y→ deslocamento
Hipótese: 3.1) admitir que a massa da carreta é desprezível frente à massa m do bloco.
3.2) admitir que a massa da carreta não seja desprezível.

Ex. 4

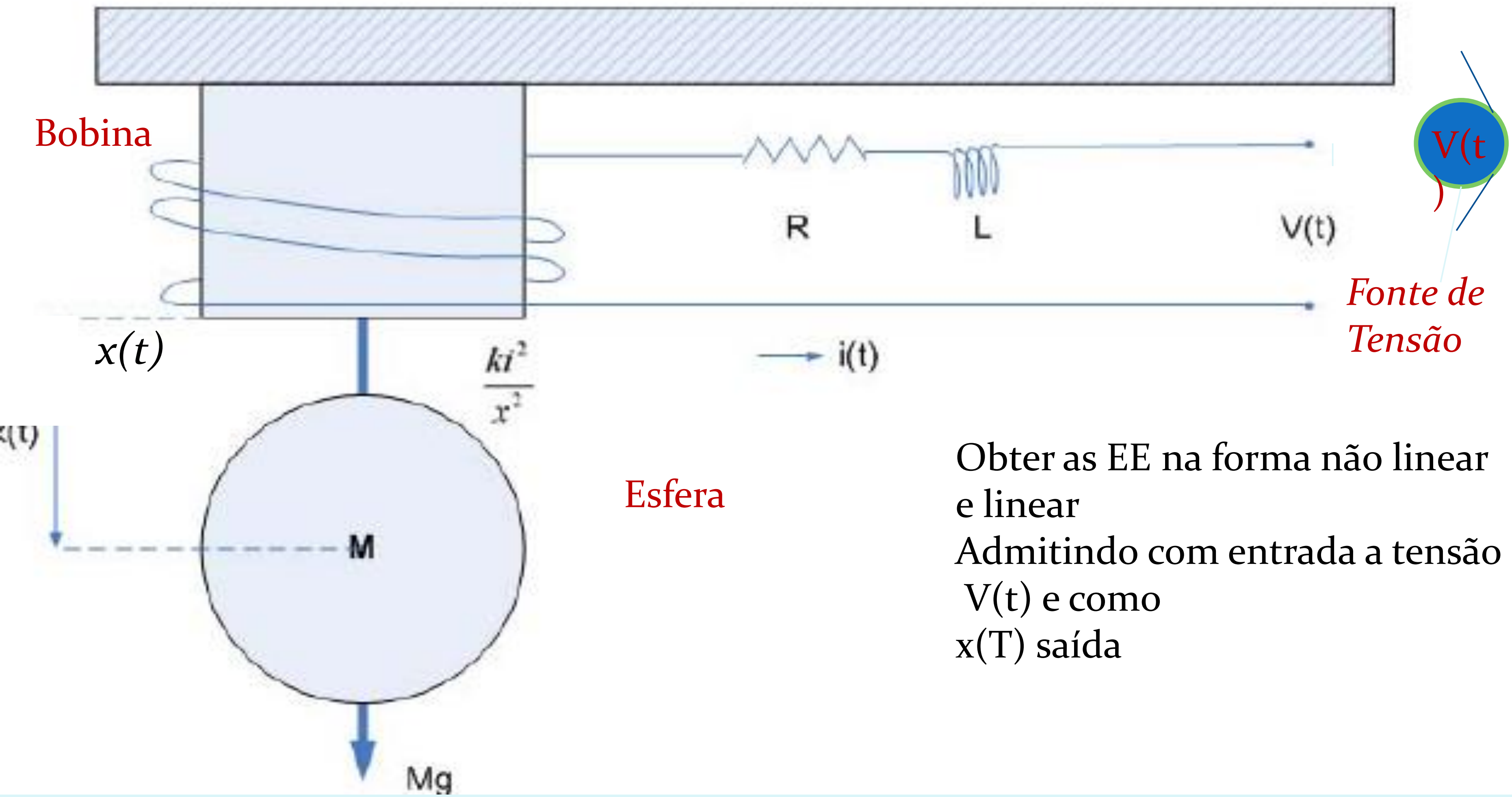


4a) grandes movimentos
4b) pequenos movimentos: (linearização)
(θ= inclinação do chassi)

Ex. 5

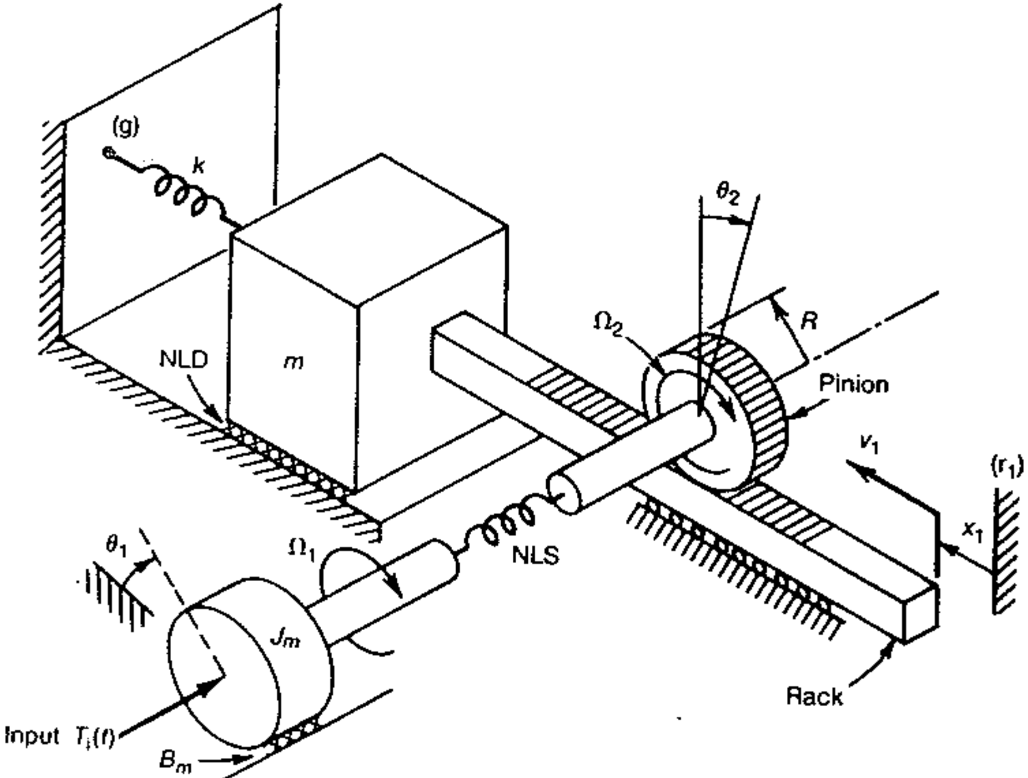


SUSPENSÃO MAGNÉTICA DE UMA ESFERA



Obter as EE na forma não linear e linear
Admitindo com entrada a tensão V(t) e como
x(T) saída

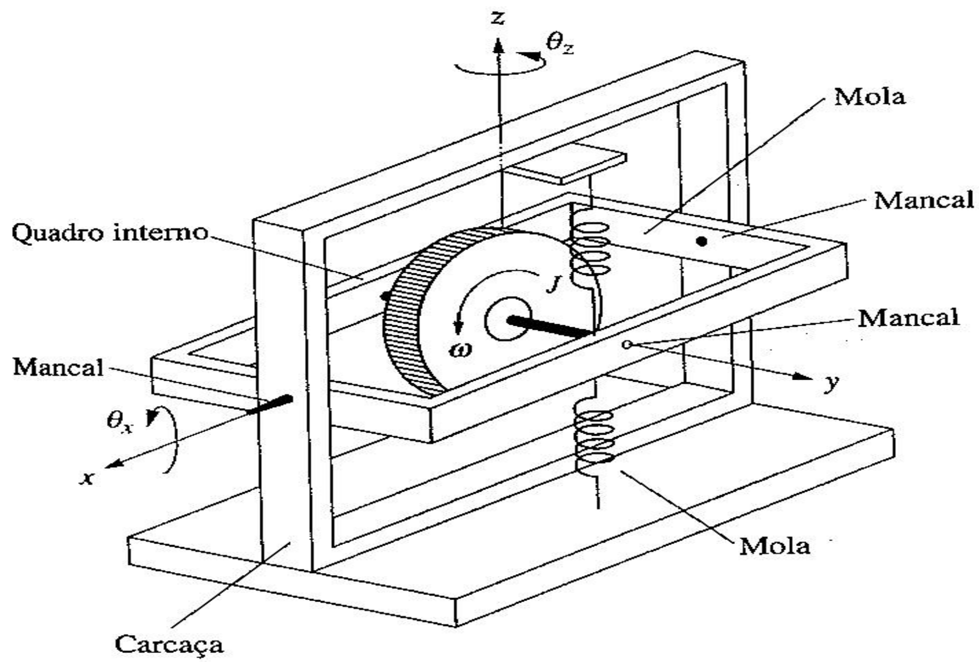
Ex. 7



O mecanismo de pinhão-cremalheira é um modelo físico do acionador de uma máquina-ferramenta. O disco de inércia Jm, representa a inércia de um motor de corrente contínua controlado por uma fonte de tensão ideal Va(t) na armadura, produzindo o torque Ti(t) (ilustrado) que é aplicado ao conjunto. O motor CC, não totalmente ilustrado na figura, tem indutância de armadura L, e resistência do circuito da armadura R, sendo o atrito interno Bm (ilustrado).

O eixo que liga o motor ao pinhão é longo e flexível, e sua rigidez é modelável por um torque não linear dado por $T_{NLK}=2|\theta_1-\theta_2|(\theta_1-\theta_2)\}$, porém sua inércia é desprezível. A velocidade angular no eixo do motor associada ao deslocamento θ_1 é Ω_1 e no pinhão é Ω_2 associada ao deslocamento θ_2. A força de atrito (NLD) entre o carro m e a carcaça fixa é não-linear e dada por $Fat=2v_1^3(t)$, onde $v_1(t)$ é a velocidade da cremalheira. O carro ainda está sujeito a uma força de mola de rigidez k. a) Obtenha as equações dinâmicas do sistema b) Linearize as equações. c) Coloque no EE

_Ex. 8_



Os giroscópios são usados em veículos espaciais, aviões, navios e submarinos para fazer navegação inercial. O giroscópio ilustrado na figura é um girômetro cujo movimento angular do quadro interno é restringido por meio das molas ilustradas de rigidez K. Admita ainda que há atrito viscoso com coeficiente de amortecimento B nos mancais. Como sabemos, uma velocidade angular ao redor do eixo z faz o rotor precessar ao redor do eixo x.

Assim, a entrada deste sistema é uma velocidade angular ao redor de z e a saída é um deslocamento angular ao redor de x. Como o quadro externo é solidário ao veículo, o deslocamento angular em torno do eixo x é uma medida da velocidade angular do veículo ao redor do eixo vertical z. a) Modele o girômetro, admitindo que o momento angular do girômetro ao redor de x seja conhecido e igual à Jx; b) Determine o modelo matemático no EE.