MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Equações diferenciais lineares
Exemplos e aplicações[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] R. Brockett e K. Ogata.

Neste aula veremos alguns **exemplos** e aplicações de equações diferenciais lineares.

- Pretendemos discutir alguns processos de **modelagem**.
- Vamos **calcular** matrizes de transição associadas a tais modelos.
- Usaremos a fórmula da variação das constantes nos casos **não** homogêneos[2].
- Analisaremos o **comportamento** das solução quando pertinente.
- Finalmente usaremos o Teorema de Cayley-Hamilton para calcular e^A.

[2] Que são aplicados a sistemas com controle.

Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo num instante t sujeito a uma **força** f dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [t_0, t_1) \\ f_0 & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \in t > t_2 \end{cases}$$

para alguma **constante** $f_0 > 0$. Se o corpo possui massa m, então temos

$$m\ddot{x}(t) = f(t)$$

- x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como controle.

Se $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos o seguinte sistema de **controle**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A matriz de **transição** do sistema já foi calculada e é

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

já que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$. Aplicando a **fórmula** da variação das constantes obtemos

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & (t-s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(s)ds \\
&= \begin{pmatrix} x_1(t_0) + (t-t_0)x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}(t-s)\,ds \\ x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}\,ds \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

que nos dá como **saída**

$$
x(t) = x(t_0) + (t-t_0)\dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{m}(t-s)\,ds.
$$

Efeito do termo forçante f

Agora usamos a expressão de f para **calcularmos**

$$F(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(s)(t-s)\,ds.$$

- Se $t \in [t_0, t_1)$ temos $f(t) \equiv 0 \Rightarrow F(t) \equiv 0$.
- Suponha agora $t \in [t_1, t_2)$, então

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_1} 0\,(t-s)\,ds + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t} f_0\,(t-s)\,ds \\
&= \frac{f_0}{m}\int_{t_1}^{t}(t-s)\,ds = \frac{f_0}{m}\left[t(t-t_1) - \left.\frac{s^2}{2}\right|_{t_1}^{t}\right] \\
&= \frac{f_0}{m}\left[t(t-t_1) - \frac{t^2-t_1^2}{2}\right] = \frac{f_0}{m}(t-t_1)\left[t - \frac{t+t_1}{2}\right] \\
&= \frac{f_0}{2m}(t-t_1)^2 \quad \text{se } t \in [t_1, t_2).
\end{aligned}$$

- Finalmente, se $t \geq t_2$ temos

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t_1} 0\,(t-s)\,ds + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2} f_0\,(t-s)\,ds + \frac{1}{m}\int_{t_2}^{t} 0\,(t-s)\,ds \\
&= \frac{f_0}{m}\int_{t_1}^{t_2} (t-s)\,ds \\
&= \frac{f_0}{m}\left[t(t_2-t_1) - \frac{s^2}{2}\bigg|_{t_1}^{t_2}\right] = \frac{f_0}{m}\left[t(t_2-t_1) - \frac{t_2^2-t_1^2}{2}\right] \\
&= \frac{f_0}{m}\frac{(t_2-t_1)}{2}\left[2t-(t_2+t_1)\right] \quad \text{se} \quad t \geq t_2.
\end{aligned}
$$

Saída do sistema

Assim **obtemos**

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + F(t)$$

com

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \in [t_0, t_1) \\ \frac{f_0}{2m}(t - t_1)^2 & t \in [t_1, t_2] \\ \frac{f_0}{m}\frac{(t_2 - t_1)}{2}\left[2t - (t_2 + t_1)\right] & t \in t > t_2 \end{cases} .$$

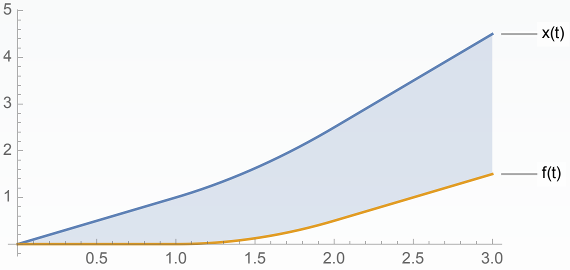

Figura: $f_0 = m = t_1 = 1$, $t_2 = 2$. $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

⋆ O que podemos **dizer** sobre a saída do sistema para t **grande**?

Saída do sistema

Sabemos que

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + F(t)$$

com

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \in [t_0, t_1) \\ \frac{f_0}{2m}(t - t_1)^2 & t \in [t_1, t_2] \\ \frac{f_0}{m}\frac{(t_2 - t_1)}{2}\left[2t - (t_2 + t_1)\right] & t \in t > t_2 \end{cases}.$$

Assumindo que as constantes dadas são **positivas** temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} x(t) &= \lim_{t\to+\infty} \left[x(t_0) + (t - t_0)\dot{x}(t_0) + F(t)\right] \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[x(t_0) + (t - t_0)\dot{x}(t_0)\right] + \lim_{t\to+\infty} \frac{f_0}{m}\frac{(t_2 - t_1)}{2}\left[2t - (t_2 + t_1)\right] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Molas em série

A equação do **sistema mecânico** ao lado é

$$m\ddot{x} + k_e x = F$$

onde m é a **massa** do corpo, F uma força externa e a **constante elástica** é dada por

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

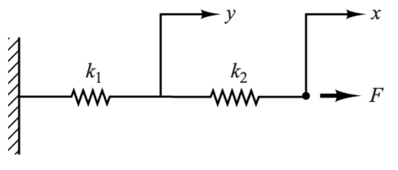

Figura: Duas molas em série.

Com efeito, para molas em série, a força aplicada em cada uma é a **mesma**. Logo

$$F = k_1 y \quad \text{e} \quad F = k_2(x - y).$$

Substituindo y da primeira equação na segunda obtemos

$$F = k_2\left(x - \frac{F}{k_1}\right) \quad \Rightarrow \quad F\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) = k_2 x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{x} = \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} x = k_e x.$$

Utilizando as variáveis de **estado** $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ sabemos que

- O sistema de **controle** é

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_e/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

$$x(t) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- A matriz de **transição** é

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_e/m}(t - t_0)) & \frac{1}{\sqrt{k_e/m}} \sin(\sqrt{k_e/m}(t - t_0)) \\ -\sqrt{k_e/m} \sin(\sqrt{k_e/m}(t - t_0)) & \cos(\sqrt{k_e/m}(t - t_0)) \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar agora a **saída** do sistema.

Seja $b = \sqrt{k_e/m}$. Aplicando a **fórmula** da variação das constantes obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b(t-t_0)) & \frac{1}{b}\sin(b(t-t_0)) \\ -b\sin(b(t-t_0)) & \cos(b(t-t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos(b(t-s)) & \frac{1}{b}\sin(b(t-s)) \\ -b\sin(b(t-s)) & \cos(b(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F(s)ds$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(b(t-t_0))x_1(t_0) + \frac{1}{b}\sin(b(t-t_0))x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F(s)}{mb} \sin(b(t-s))\, ds \\ -b\sin(b(t-t_0))x_1(t_0) + \cos(b(t-t_0))x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F(s)}{m} \cos(b(t-s))\, ds \end{pmatrix}$$

que nos dá como **saída**

$$x(t) = \cos(b(t-t_0))x_1(t_0) + \frac{1}{b}\sin(b(t-t_0))x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{F(s)}{mb} \sin(b(t-s))\, ds.$$

Efeito do termo forçante F

Agora **suponha** que F seja dado por

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in t > t_1 \end{cases}$$

para alguma constante $F_0 > 0$ e **calcule**

$$f(t) = \int_0^t \frac{F(s)}{mb} \sin(b(t-s))\, ds.$$

Se $t \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{F_0}{mb} \int_0^t \sin(b(t-s))\, ds = \frac{F_0}{mb} \frac{\cos(b(t-s))}{b} \Big|_0^t \\ &= \frac{F_0}{mb^2}(1 - \cos(bt)) \end{aligned}$$

Por outro lado se $t > t_1$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \frac{F(s)}{mb}\,\sin(b(t-s))\,ds \\
&= \int_0^{t_1} \frac{F_0}{mb}\sin(b(t-s))\,ds + \int_{t_1}^t \frac{0}{mb}\sin(b(t-s))\,ds \\
&= \frac{F_0}{mb}\,\frac{\cos(b(t-s))}{b}\Big|_0^{t_1} \\
&= \frac{F_0}{mb^2}\left[\cos(b(t-t_1)) - \cos(bt)\right]
\end{aligned}
$$

Saída do sistema

Como $b = \sqrt{k_e/m}$ **obtemos** que

$$x(t) = \cos(\sqrt{k_e/m}(t - t_0))x(t_0) + \frac{1}{\sqrt{k_e/m}} \sin(\sqrt{k_e/m}(t - t_0))\dot{x}(t_0) + f(t)$$

com

$$f(t) = \begin{cases} (F_0/k_e)(1 - \cos(t\sqrt{k_e/m})) & t \in [0, t_1] \\ (F_0/k_e)\left[\cos(\sqrt{k_e/m}(t - t_1)) - \cos(t\sqrt{k_e/m})\right] & t \in t > t_1 \end{cases}.$$

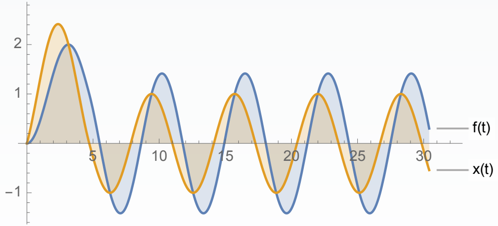

Figura: $F_0 = k_e = m = t_1 = 1, x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

Em seguida utilizamos o Teorema de Cayley-Hamilton para **calcular** a exponencial de **matrizes**. Abaixo segue seu enunciado. Sua prova pode ser vista em Link

Teorema de Cayley-Hamilton

Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz identidade. Considere agora

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + ... + \alpha_n\lambda^n$$

o polinômio **característico** da matriz A. Então

$$p_A(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_n A^n = 0.$$

Funções matriciais

Se f é uma função **analítica** podemos escrever-la como uma série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Queremos **determinar** $f(A)$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Seja $p_A(x)$ o polinômio característico de A. Se **dividimos** f por p_A obtemos

$$f(x) = q(x)p_A(x) + r(x)$$

para algum polinômio quociente q e resto r com grau de r **estritamente** menor que n

$$r(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton **temos** $p_A(A) = 0$. Logo

$$f(A) = q(A)p_A(A) + r(A) = r(A).$$

Assim nosso problema se reduz a determinar o resto r.

Para encontrarmos r usamos os **autovalores** λ_i de A. Como $p_A(\lambda_i) = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(\lambda_i) &= q(\lambda_i)p_A(\lambda_i) + r(\lambda_i) \\ &= r(\lambda_i) \\ &= c_0 + c_1\lambda_i + ... + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} \quad (*) \end{aligned}$$

para cada autovalor λ_i.

Assim se A possui n autovalores **distintos** podemos determinar os coeficiente c_k com $0 \leq k \leq n-1$ resolvendo o sistema **linear** $n \times n$ dado pelas equações $(*)$. Logo

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k.$$

Quando alguns autovalores **não** são distintos, ie., quando $\lambda_i = \lambda_j$ para algum $i \neq j$, **duas** ou mais equações são idênticas e o sistema não possui solução **única**. Nesse caso, se λ_i é um autovalor de **multiplicidade** $m > 1$, então as $m - 1$ derivadas de p_A se anulam em λ_i produzindo outras $m - 1$ equações linearmente **independentes**

$$f^{(k)}(\lambda_i) = \frac{d^k}{dx^k}\Big(q(x)p_A(x) + r(x)\Big)\Big|_{x=\lambda_i} = r^{(k)}(\lambda_i) \quad 1 \leq k \leq m-1$$

que combinada com as **demais** equações nos dá um sistema linear com solução única. Isso nos garantindo que as constantes c_k sejam **determinadas**.

- $\star$ Em particular, se $f(x) = e^{tx}$, então **existem** funções $c_k(t)$ tais que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t)A^k.$$

Exemplo 1.

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $f(A) = e^{At}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Como A é uma matriz **triangular** vemos facilmente que 3 e 2 são os autovalores de A que nos dá $p_A(x) = (x-3)(x-2)$. **Encontramos** $r(x) = c_0 + c_1 x$ resolvendo

$$f(3) = r(3) \quad \text{e} \quad f(2) = r(2)$$

ie.

$$e^{3t} = c_0 + 3c_1 \quad \text{e} \quad e^{2t} = c_0 + 2c_1$$

que nos dá

$$c_0 = 3e^{2t} - 2e^{3t} \quad \text{e} \quad c_1 = e^{3t} - e^{2t}.$$

Assim

$$e^{At} = r(A) = (3e^{2t} - 2e^{3t})\, I + (e^{3t} - e^{2t})\, A$$

$$= \begin{pmatrix} (3e^{2t} - 2e^{3t}) + 3(e^{3t} - e^{2t}) & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & (3e^{2t} - 2e^{3t}) + 2(e^{3t} - e^{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ para **algum** $a \in \mathbb{R}$. Calcule $f(A) = e^{At}$.

$\lambda = a$ é autovalor com **multiplicidade** 2 e $p_A(x) = (x-a)^2$. Aqui usamos

$$f(a) = r(a) \quad \text{e} \quad f'(a) = r'(a)$$

que nos dá

$$e^{at} = c_0 + c_1 a \quad \text{e} \quad te^{at} = c_1.$$

Logo

$$c_1 = te^{at} \quad \text{e} \quad c_0 = e^{at}(1-at)$$

e

$$e^{At} = r(A) = e^{at}(1-at)\,I + te^{at}\,A$$

$$= e^{at}\begin{pmatrix} (1-at)+at & t \\ 0 & (1-at)+at \end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ para **algum** $a \in \mathbb{R}$. Calcule $f(A) = e^{At}$.

Os autovalores de A são **imaginários puros**: $\pm i \Rightarrow p_A(x) = (x-i)(x+i)$.

$$f(i) = r(i) \quad \text{e} \quad f(-i) = r(-i)$$

que nos dá

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = c_0 + c_1 i \quad \text{e}$$
$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i \sin t = c_0 - c_1 i.$$

Logo

$$c_0 = \cos t \quad \text{e} \quad c_1 = \sin t$$

e

$$e^{At} = r(A) = \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

1. Calcule as seguintes funções matriciais:

a) e^{At} com $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\sin(At)$ com $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\cosh(At)$ com $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) e^{At} com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Movimento retilíneo com atrito

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo num instante t sujeito a uma **força** f dada por

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in t > t_1 \end{cases}$$

para alguma **constante** $f_0 > 0$. Se o corpo possui massa m e sofre resistência, temos

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = f(t)$$

para algum $b > 0$.

a) Calcule a matriz de **transição** deste sistema.
b) Encontre a saída $x(t)$ com condições **iniciais** $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.
c) **Analise** $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ assumindo $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.