MAT0226 - Equações Diferenciais

2a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2020

(1) Determine se o par de funções dado é linearmente independente ou linearmente dependente:
(a) $f(t) = t^2, \quad g(t) = t^2 - 5t$
(b) $f(x) = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \quad e^{\lambda t}\text{sen}\,(\mu t), \quad \mu \neq 0$
(c) $f(x) = e^{3x}, \quad e^{3(x-1)}$
(d) $f(x) = x^3, \quad f(x) = |x|^3$

(2) Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy" + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2 t^{1/2}$ não é, em geral. Explique por que isto não contradiz o princípio da superposição.

(3) A função $y = sen(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y" + py' + qy = 0$, com coeficientes constantes em um intervalo contendo $t = 0$? Explique sua resposta.

(4) Encontre o Wronskiano do par de funções dado:
a) $e^{2t}, \quad e^{3t/2}$ b) $\cos t, \quad \text{sen}\, t$
c) $e^{-2t}, \quad te^{-2t}$ d) $\cos^2 t, \quad 1 + \cos 2t$

(5) O Wronskiano de duas funções é $W(t) = t\text{sen}^2 t$. As funções podem ser linearmente dependentea?

(6) Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que as funções $y_3 = y_1 + y_2$ e $y_4 = y_1 - y_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções. Reciprocamente Se y_3 e y_4 são soluções linearmente independentes, mostre que as funções y_1 e y_2 formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

(7) Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, determine sob que condições as funções $y_3 = ay_1 + by_2$ e $y_4 = cy_1 + dy_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

(8) Mostre que se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

(9) Mostre que se y_1 e y_2 atingem máximo ou mínimo no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

(10) Mostre que as funções $f(t) = t^3$ e $g(t) = t^2|t|$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$, mas não são linearmente dependentes em $-1 < t < 1$. Embora f e g sejam linearmente independentes neste intervalo, Mostre que $W(f, g)$ é nulo neste intervalo. f e g podem ser soluções de uma equação linear de segunda ordem com coeficientes contínuos em $-1 < t < 1$?.

(11) Use o método dos coeficientes a determinar para encontrar a solução geral das equações:
(a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$
(b) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
(c) $y'' - y' - 2y = \text{sen}\, 2x$
(d) $y''' - 6y'' + 11y\prime - 6y = 2xe^{-x}$

(12) Use o método da variação dos parâmetros para encontrar a solução geral das equações:
(a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
(b) $\ddot{x} + 4x = \text{sen}^2 2t$
(c) $y^{(4)} = 5x$