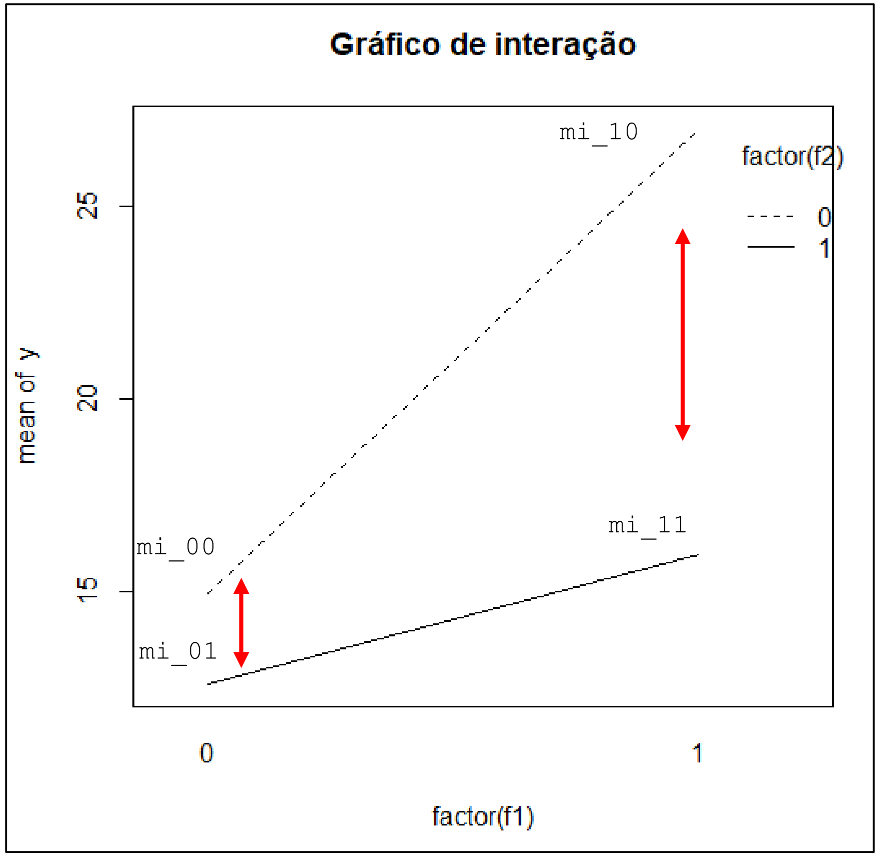
MAE327
PLANEJAMENTO E PESQUISA II

Profa. Júlia Maria Pavan Soler

IME-USP 2° SEM/2020

Modelos de ANOVA e Regressão
Comparações entre Médias de Grupos

Delineamentos Fatoriais Cruzados $\Rightarrow$ Interesse em Efeitos de Interação entre os Fatores



Considere um DCA Fatorial 2x2

$F1$	0	0	1	1
$F2$	0	1	0	1
	μ_{00}	μ_{01}	μ_{10}	μ_{11}

Efeito de Interação entre os Fatores F1 e F2.

A hipótese de inexistência de interação equivale a:

$$\Rightarrow \mu_{00} - \mu_{01} = \mu_{10} - \mu_{11} \quad \Rightarrow \quad \mu_{00} - \mu_{01} - \mu_{10} + \mu_{11} = 0$$

$$\Rightarrow (1,-1,-1,1)\begin{pmatrix} \mu_{00} \\ \mu_{01} \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad C\,\beta = 0$$

Modelos de ANOVA e Regressão
Comparações entre Médias de Grupos

$$Y_{ijk} \sim N\left(\mu_{jk};\sigma^2\right); \quad i=1,\dots,r\,;\, j=1,\dots,a; k=1,\dots,b$$

$$\bar{Y}_{jk} \sim N\left(\mu_{jk};\sigma^2/r\right) \;\Rightarrow\; \sum_{jk} c_{jk}\bar{Y}_{jk} \sim N\left(\sum_{jk} c_{jk}\mu_{jk};\sigma^2/r\sum_{jk} c_{jk}^2\right); \quad \sum_{jk} c_{jk} = 0$$

contraste entre médias

$$H_0:\sum_{jk} c_{jk}\mu_{jk} = 0 \quad \times \quad H_1:\sum_{jk} c_{jk}\mu_{jk} \neq 0$$

$$t = \frac{\sum_{jk} c_{jk}\bar{Y}_{jk}}{\sqrt{QM\,\mathrm{Res}/r\sum_{jk} c_{jk}^2}} \sim t_{g.l.\mathrm{Res}} \quad ; \quad QM\,\mathrm{Res} = \hat{\sigma}^2$$

Soma de Quadrados do Contraste

$$t^2 = F = \frac{\left(\sum_{jk} c_{jk}\bar{Y}_{jk}\right)^2}{QM\,\mathrm{Res}/r\sum_{jk} c_{jk}^2} = \frac{\left(\sum_{jk} c_{jk}\bar{Y}_{jk}\right)^2 / \left(\sum_{j} c_{lj}^2/r\right)}{QM\,\mathrm{Res}} = \frac{SQ(C)}{QM\,\mathrm{Res}} \sim F_{1,(g.l.\mathrm{Res})}$$

$$H_0: C\beta = 0 \quad \times \quad H_1: C\beta \neq 0$$

$$t = \frac{C\hat{\beta}}{\sqrt{C\,V\left(\hat{\beta}\right)C'}} \sim t_{g.l.\mathrm{Res}}; \quad V\left(\hat{\beta}\right) = \left(X'X\right)^{-1}\sigma^2$$

Podemos considerar β definido sob diferentes parametrizações (Médias, Desvios, Casela de Referência)

Modelos de ANOVA e Regressão
Comparações entre Médias de Grupos

DCA Fatorial 2x2: Parametrização Casela de Referência (fit1)

No R: ajustamos o modelo de ANOVA via as funções “aov” e “lm”

$$y_{ijk} = \mu_{00} + \tau_{1j} + \tau_{2k} + \tau_{12jk} + e_{ijk} \Rightarrow Y = X\beta + e; \quad \beta = \begin{pmatrix} \mu_{00} & \tau_1 & \tau_2 & \tau_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_{00}; \quad \mu_{10} = \mu_{00} + \tau_1; \quad \mu_{01} = \mu_{00} + \tau_2; \quad \mu_{11} = \mu_{00} + \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}$$

$$\Rightarrow \mu_{00} - \mu_{01} - \mu_{10} + \mu_{11} = \mu_{00} - (\mu_{00} + \tau_1) - (\mu_{00} + \tau_2) + (\mu_{00} + \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) = \tau_{12}$$

$$\Rightarrow C\beta = 0 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DCA 1 Fator em 4 níveis: Parametrização Casela de Referência (fit2)

?

DCA 1 Fator em 4 níveis (ou Fatorial 2x2): Parametrização de Médias (fit3)

?

Modelos de ANOVA e Regressão
Comparações entre Médias de Grupos

DCA 1 Fator em 4 níveis: Parametrização Casela de Referência (fit2)

$$y_{ij} = \mu_{00} + \tau_j + e_{ij};\ j = 2,3,4 \quad \Rightarrow \quad Y = X\beta + e; \quad \beta = \begin{pmatrix} \mu_{00} & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_{00}; \quad \mu_{10} = \mu_{00} + \tau_2; \quad \mu_{01} = \mu_{00} + \tau_3; \quad \mu_{11} = \mu_{00} + \tau_4$$

$$\Rightarrow \mu_{00} - \mu_{01} - \mu_{10} + \mu_{11} = \mu_{00} - \left(\mu_{00} + \tau_2\right) - \left(\mu_{00} + \tau_3\right) + \left(\mu_{00} + \tau_4\right) = -\tau_2 - \tau_3 + \tau_4$$

$$\Rightarrow C\beta = 0 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

No R: ajustamos o modelo de ANOVA via as funções “aov” e “lm”

DCA 1 Fator em 4 níveis (ou Fatorial 2x2): Parametrização de Médias (fit3)

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij};\ j = 2,3,4 \quad \Rightarrow \quad Y = X\beta + e; \quad \beta = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_{00}; \quad \mu_2 = \mu_{10}; \quad \mu_3 = \mu_{01}; \quad \mu_4 = \mu_{11}$$

$$\Rightarrow \mu_{00} - \mu_{01} - \mu_{10} + \mu_{11} \quad \Rightarrow \quad C\beta = 0; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

No R: ajustamos o modelo de Regressão via a função “lm”

Tabela de ANOVA e Constrastes Ortogonais entre Médias

Oficina no R: Análise dos Dados Simulados

```
Tabela de ANOVA: DCA uma Fator em 4 níveis

               Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
factor(trat)    3  1238.3   412.8   194.4  <2e-16
Residuals      36    76.5     2.1
```

$\Rightarrow$

Partição do *g.l* e da *SQ*

```
Tabela de ANOVA: DCA Fatorial 2x2

                      Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
factor(f1)             1  597.03  597.03 281.127 < 2.2e-16
factor(f2)             1  451.20  451.20 212.457 < 2.2e-16
factor(f1):factor(f2)  1  190.11  190.11  89.517  2.67e-11
Residuals             36   76.45    2.12
```

Contrastes ortogonais particionando os 3 graus de liberdade do “efeito de tratamento”:

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij};\ j = 2,3,4 \quad \Rightarrow \quad Y = X\beta + e; \quad \beta = \begin{pmatrix} \mu_{00} & \mu_{10} & \mu_{01} & \mu_{11} \end{pmatrix}$$

Efeito principal de F1

$$\Rightarrow (\mu_{00} + \mu_{01})/2 = (\mu_{10} + \mu_{11})/2 \quad \Rightarrow \quad C_1\beta = 0; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}/2$$

Efeito principal de F2

$$\Rightarrow (\mu_{00} + \mu_{10})/2 = (\mu_{01} + \mu_{11})/2 \quad \Rightarrow \quad C_2\beta = 0; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}/2$$

Efeito de interação entre F1 e F2

$$\Rightarrow \mu_{00} - \mu_{10} = \mu_{01} - \mu_{11} \Rightarrow \quad C_3\beta = 0; \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} & C_l C_l' = 0; \quad l = 1,2,3 \\ & C_1 C_2' = 0 \\ & C_1 C_3' = 0 \\ & C_2 C_3' = 0 \end{aligned}\right.$$

São constrastes ortogonais entre médias. O teste global $F_{3,36}$ está sendo decomposto em 3 testes independentes, $F_{1,36}$. A correção para os múltiplos testes já está capturada no teste global!