

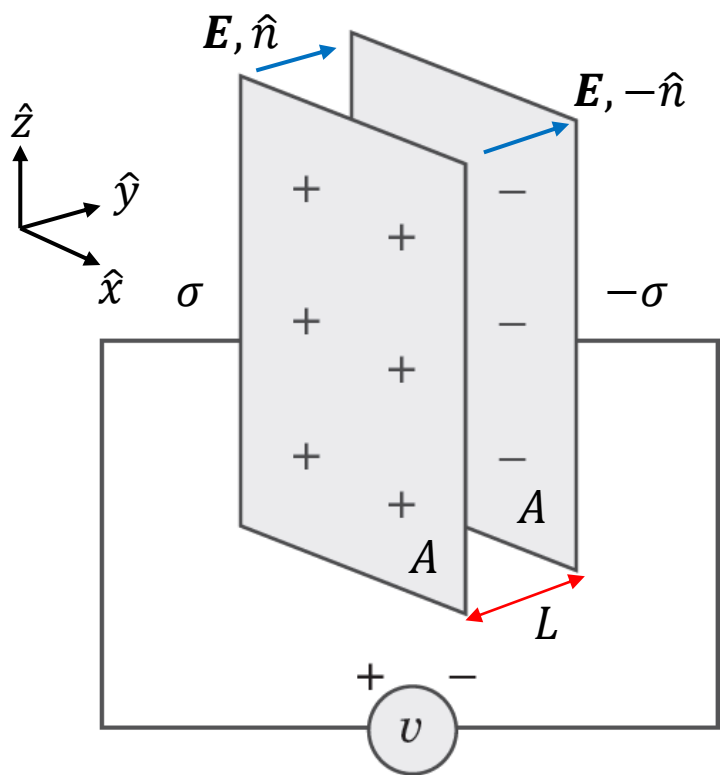
LOM3202 – CIRCUITOS ELÉTRICOS

AULA 6

Prof. Dr. Emerson G. Melo

- ❑ Capacitores;
- ❑ Indutores;
- ❑ Circuitos de Primeira Ordem;
- ❑ Resposta Natural;
- ❑ Resposta à Função Degrau Unitário

Elemento formado por duas placas condutoras separadas por um material dielétrico.



Lei de Gauss

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma dA$$

Campo elétrico produzido por uma placa infinita

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

Campo elétrico produzido por placas paralelas

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\hat{n}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Diferença de potencial entre placas paralelas

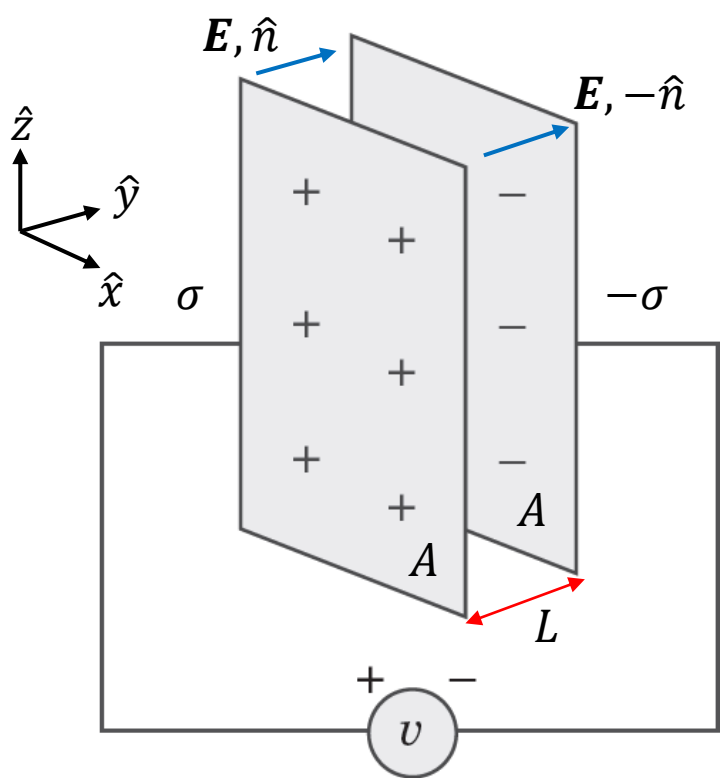
$$dv = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\int_{\sigma}^{-\sigma} dv = - \int_{\sigma}^{-\sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} dv = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} dv = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \cdot [dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}] \quad \int_0^L dv = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^L dy \quad v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

❑ O capacitor armazena energia através do seu campo elétrico.

Diferença de potencial entre placas paralelas



$$dv = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\int_{\sigma}^{-\sigma} dv = -\int_{\sigma}^{-\sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} dv = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} dv = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y} \cdot [dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}] \quad \int_0^L dv = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^L dy \quad v = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}$$

Capacitância (C)

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$v = \frac{QL}{\epsilon_0 A}$$

$$Q = v \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L}$$

$$Q = vC$$

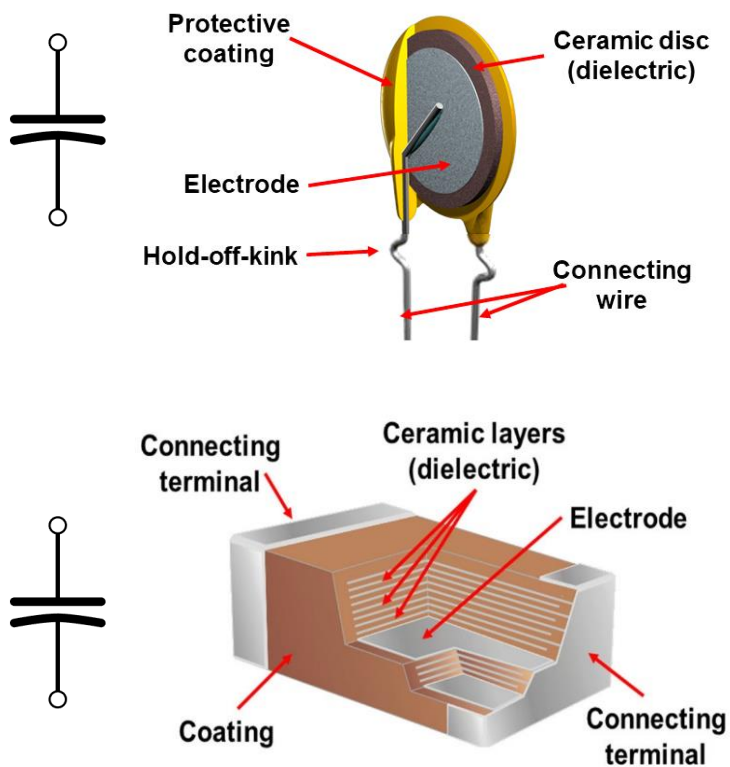
$$C = \frac{Q}{v}$$

Unidade de Medida: Farad [F]

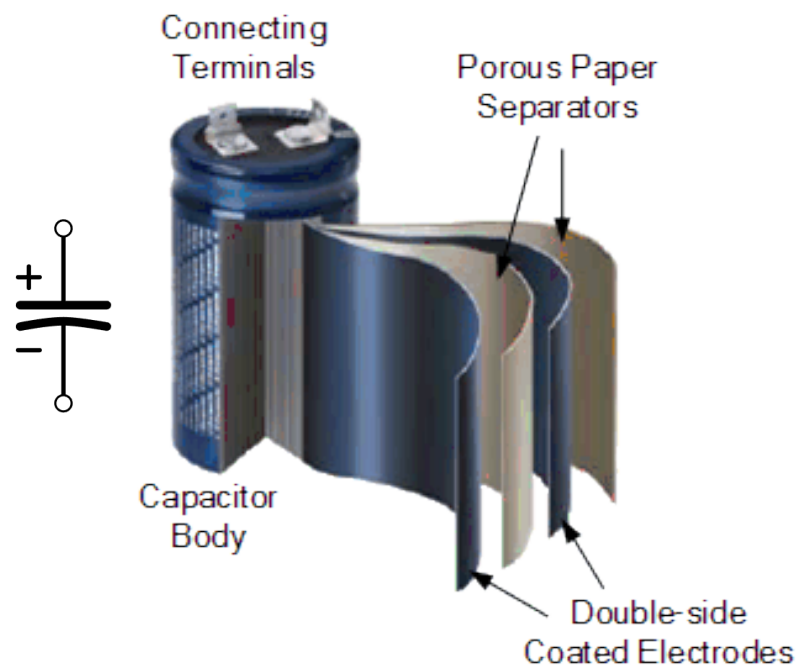
$$1F = \frac{1C}{1V}$$

Existem diversos tipos de construção.

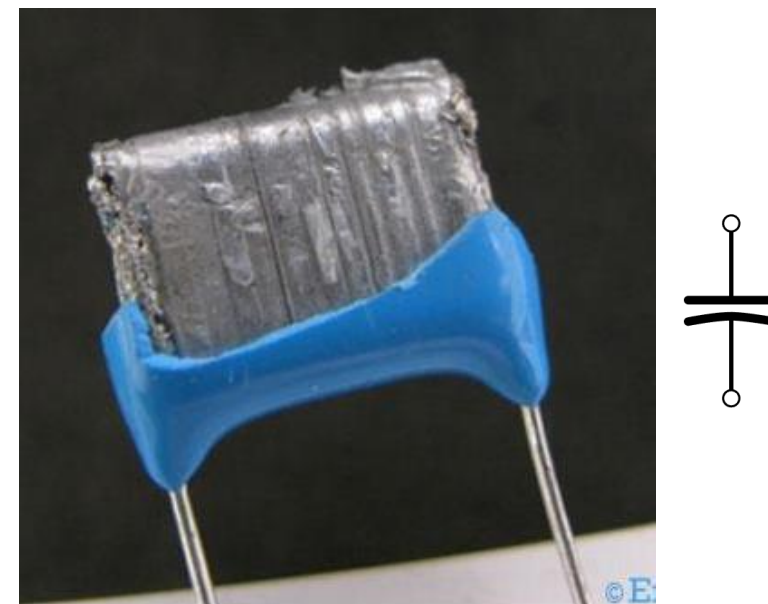
Capacitores Cerâmicos



Capacitor Eletrolítico



Capacitor Poliéster



Capacitor: Corrente e Tensão

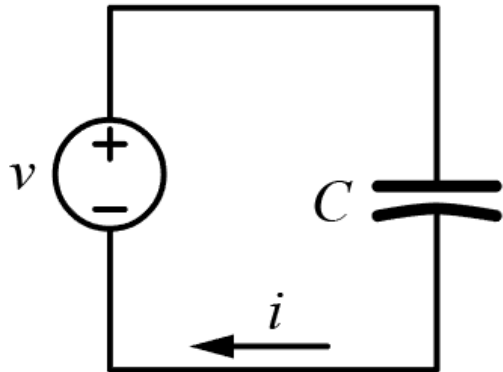
□ O capacitor apresenta oposição às variações de tensão.

Corrente através do capacitor

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$Q = vC$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



Tensão sobre o capacitor

$$dv = \frac{1}{C} i dt \quad \int dv = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

i) Apenas circula corrente através do capacitor quando ocorrem variações de tensão, ou seja, ele se comporta como um circuito aberto para fontes de tensão contínuas.

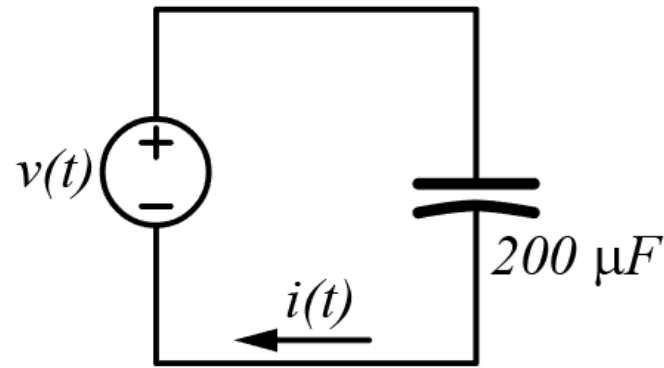
ii) A corrente pode variar de forma instantânea através do capacitor.

i) A tensão no capacitor é acumulada a partir de um instante inicial;

ii) Não ocorrem variações bruscas de tensão sobre o capacitor.

Capacitor: Corrente e Tensão

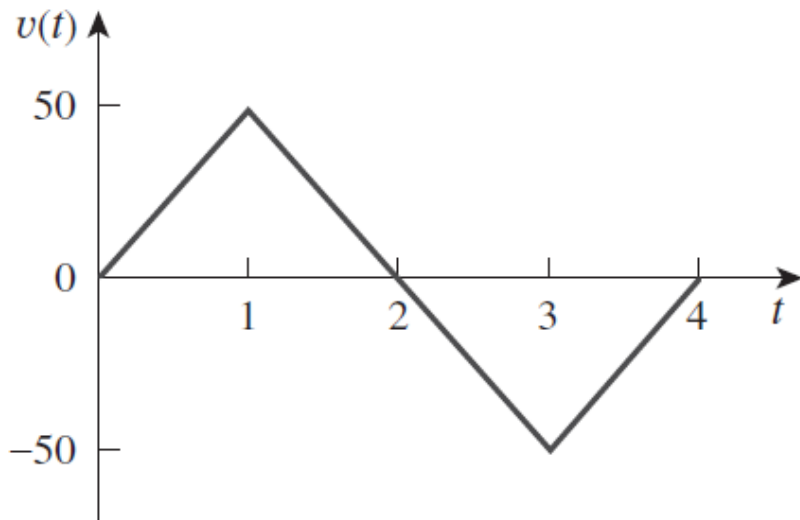
Exemplo: Calcular a corrente através do capacitor para o intervalo dado.



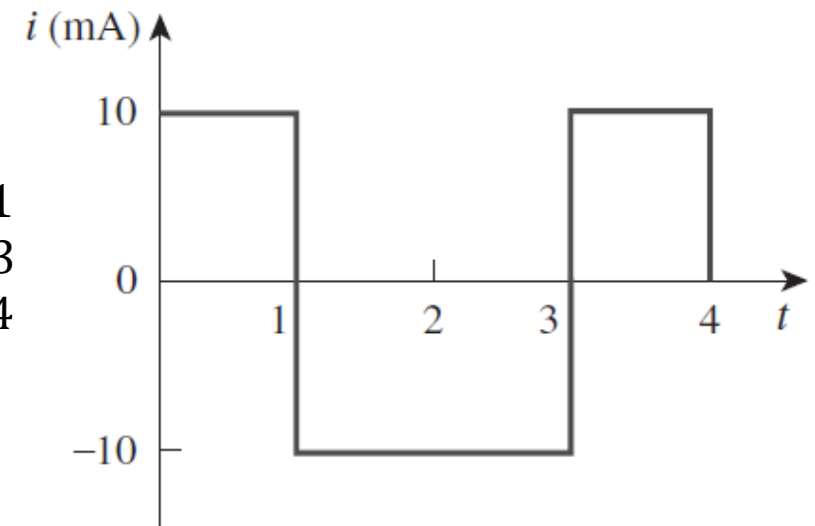
$$v(t) = \begin{cases} 50t \text{ V} & 0 < t \leq 1 \\ 100 - 50t \text{ V} & 1 < t \leq 3 \\ -200 + 50t \text{ V} & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50 & 0 < t \leq 1 \\ -50 & 1 < t \leq 3 \\ 50 & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$



$$i(t) = \begin{cases} 10 \text{ mA} & 0 < t \leq 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t \leq 3 \\ 10 \text{ mA} & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$



Capacitor: Potência

Um capacitor ideal não dissipa potência em forma de calor, apenas armazena energia.

$$p = vi$$

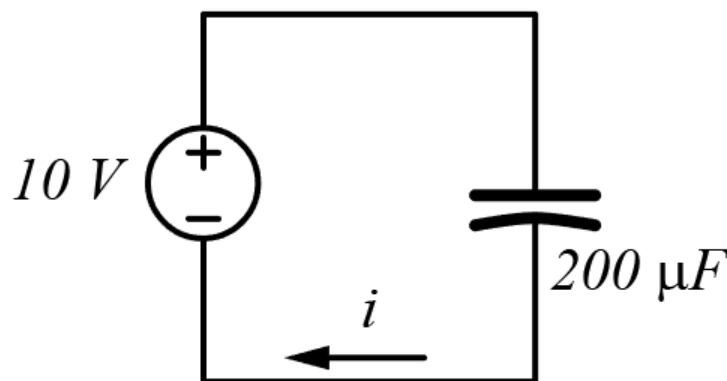
$$p = vC \frac{dv}{dt}$$

$$w = \int p dt = C \int v \frac{dv}{dt} dt = C \int v dv$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$$v = \frac{Q}{C}$$

$$w = \frac{Q^2}{2C}$$



$$i = 0 A$$

$$v = 10 V$$

$$C = 200 \mu F$$

Na condição de equilíbrio não há cargas em movimento; sem efeito Joule

$$w = \frac{1}{2} 200 \times 10^{-6} \times 10^2$$

$$w = 100 \times 10^{-4}$$

$$w = 10^{-2} J$$

$$w = 10 mJ$$

Energia armazenada

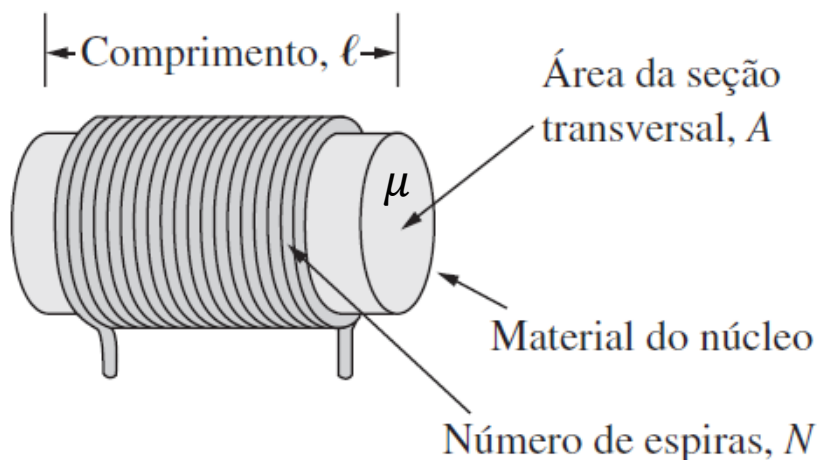
- ❑ Elemento formado por bobina cilíndrica composta de várias espiras de fio condutor.
- ❑ O indutor armazena energia através de seu campo magnético.

Lei da Indução de Faraday

$$v = NA \frac{dB}{dt}$$

Campo magnético no interior de uma bobina

$$B = i \frac{\mu N}{l}$$



Diferença de potencial em uma bobina

$$v = NA \frac{dB}{dt} = NA \frac{di}{dt} \frac{\mu N}{l} = \frac{\mu AN^2}{l} \frac{di}{dt}$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Indutância (L)

$$L = \frac{\mu AN^2}{l}$$

Unidade de Medida: Henry [H]

$$1H = \frac{1V \times 1s}{1A}$$

Exemplos de indutores.

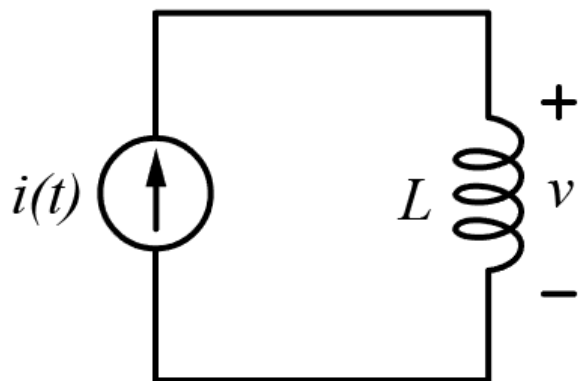
Núcleo de Ar



Núcleo de Ferrite



□ O indutor apresenta oposição às variações de corrente.



Tensão sobre o indutor

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Corrente através do indutor

$$di = \frac{1}{L} v dt \quad \int di = \frac{1}{L} \int v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0)$$

i) A diferença de potencial é nula sobre o indutor quando não existem variações de corrente, ou seja, ele se comporta como um curto-circuito para fontes de corrente contínua.

ii) A tensão pode variar de forma instantânea através do indutor.

i) A corrente no indutor é acumulada a partir de um instante inicial;

ii) Não ocorrem variações bruscas de corrente no indutor.

Indutor: Potência

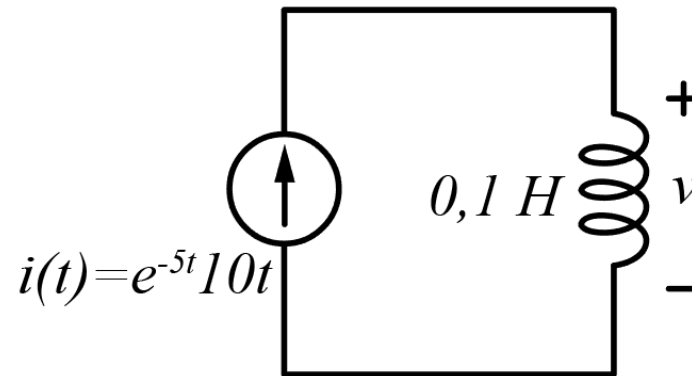
Um indutor ideal não dissipa potência em forma de calor, apenas armazena energia.

$$p = vi$$

$$p = L \frac{di}{dt} i$$

$$w = \int p dt = L \int \frac{di}{dt} i dt = L \int i di$$

$$w = \frac{1}{2} Li^2$$



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v(t) = L \frac{d}{dt} (e^{-5t} 10t)$$

$$v(t) = L(-5e^{-5t} 10t + e^{-5t} 10)$$

$$v(t) = L10e^{-5t}(1 - 5t)$$

$$L = 0,1 H$$

$$v(t) = 0,1 \times 10e^{-5t}(1 - 5t)$$

$$v(t) = e^{-5t}(1 - 5t) [V]$$

A tensão tende à zero quando t tende ao infinito

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times (e^{-5t} 10t)^2$$

$$w = \frac{1}{2} 0,1 \times e^{-10t} 100t^2$$

$$w = 5t^2 e^{-10t} [J] \text{ Energia armazenada}$$

Circuitos de Primeira Ordem

- São circuitos formados pela associação entre um elemento resistivo e um elemento reativo (capacitor ou indutor).

Circuito RC: Resposta Natural

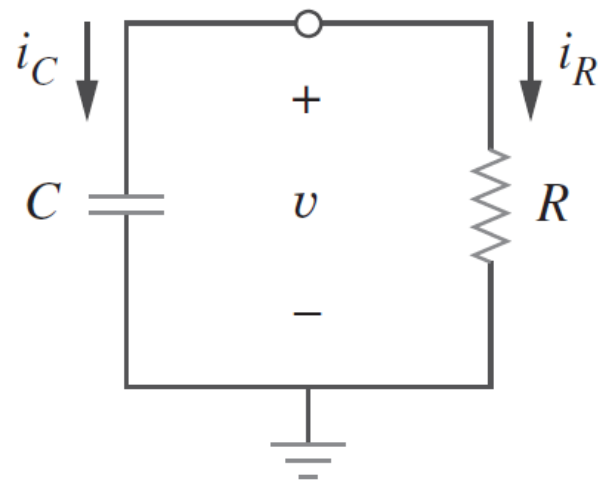
- Resposta de um circuito RC sem fonte, considerando o capacitor inicialmente carregado e com tensão inicial V_0 .

LKC

$$i_C + i_R = 0$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad i_R = \frac{v}{R}$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$



Equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0$$

Função de teste

$$v(t) = ke^{st}$$

$$\frac{d}{dt}(ke^{st}) + \frac{1}{RC}(ke^{st}) = 0$$

$$ske^{st} + \frac{ke^{st}}{RC} = 0$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)ke^{st} = 0$$

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad s = -\frac{1}{RC}$$

$$v(t) = ke^{\frac{-t}{RC}}$$

$$v(0) = ke^{\frac{-0}{RC}}$$

$$v(0) = k$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

Circuito RC: Resposta Natural

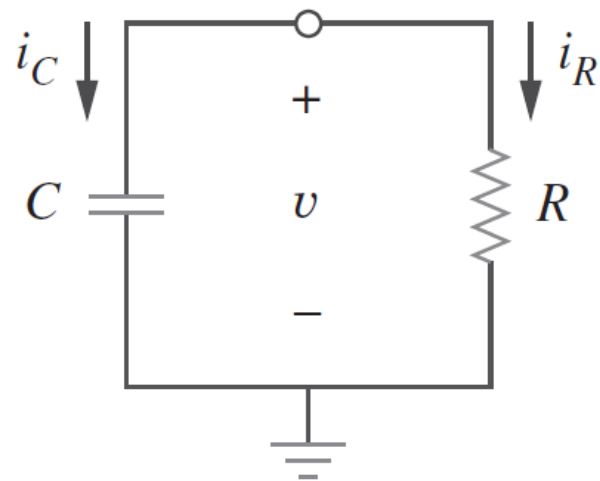
- Resposta de um circuito RC sem fonte, considerando o capacitor inicialmente carregado e com tensão inicial V_0 .

LKC

$$i_C + i_R = 0$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad i_R = \frac{v}{R}$$

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$



Equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0$$

Resolução por separação de variáveis

$$\frac{1}{v} dv = -\frac{1}{RC} dt \quad \int_0^t \frac{1}{v} dv = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

$$\ln v(t) - \ln v(0) = -\frac{t}{RC} \quad \ln[v(t)/v(0)] = -\frac{t}{RC} \quad \frac{v(t)}{v(0)} = e^{-t/RC}$$

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC}$$

$$v(t) = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

Circuito RC: Resposta Natural

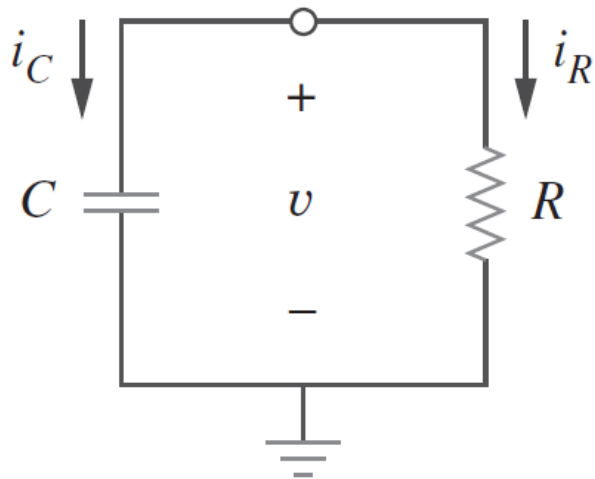
- A constante de tempo (τ) de um circuito é o tempo necessário para a resposta decair à um fator de $1/e$ ou 36,8% de seu valor inicial.

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Constante de tempo

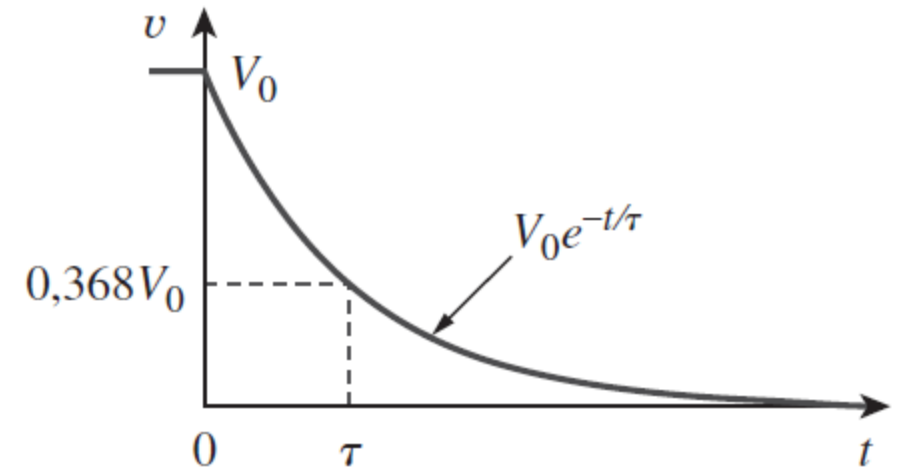
$$\tau = RC$$

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



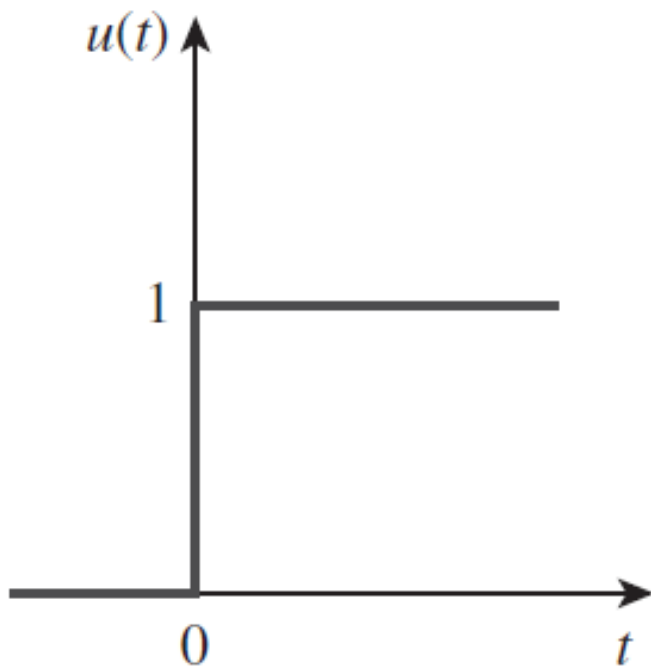
$$v(\tau) = V_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} = V_0 e^{-1} = 0,368V_0$$

Após $t = 5\tau$ a tensão no capacitor cai à menos de 1%. Ou seja o circuito leva 5τ para entrar em regime estacionário: capacitor totalmente carregado ou descarregado.

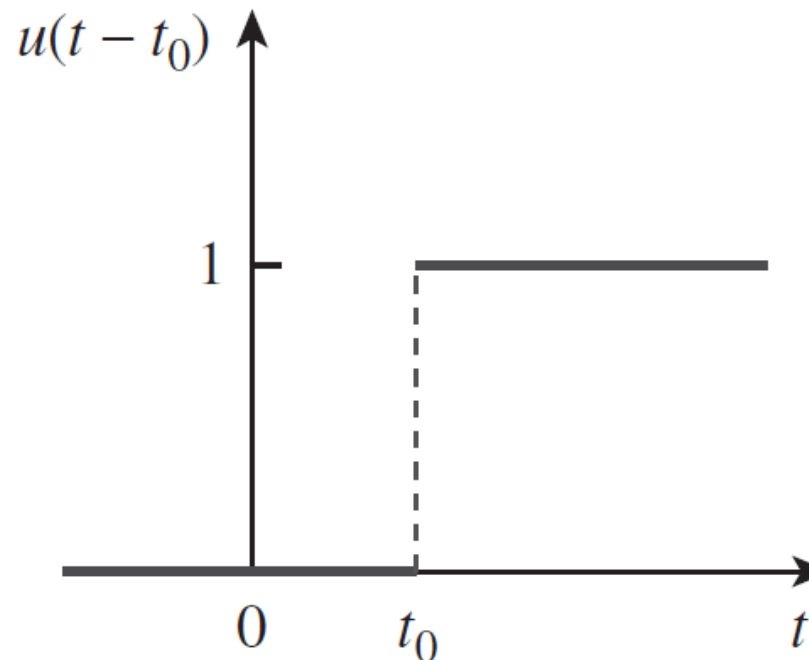


Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Função Degrau Unitário.



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

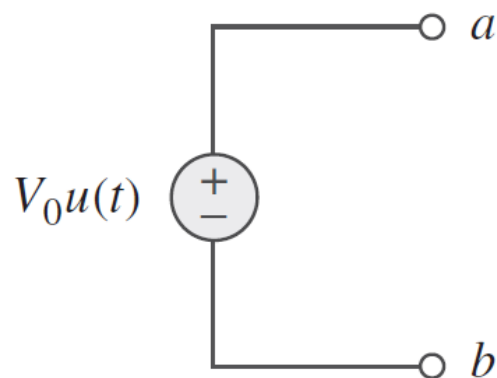


$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

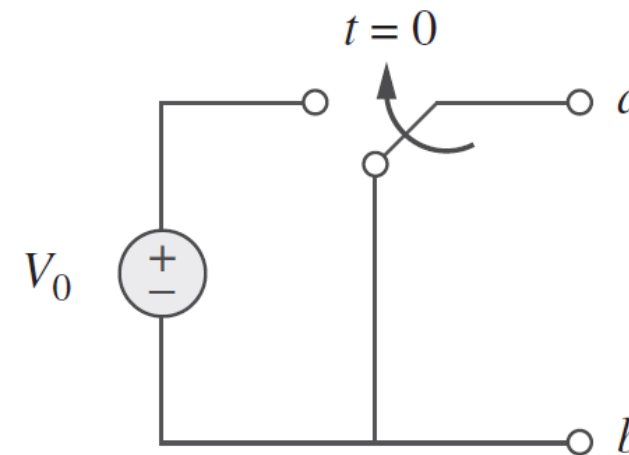
Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

- Resposta a um degrau é a resposta do circuito decorrente da aplicação súbita de uma fonte de tensão ou de corrente CC.

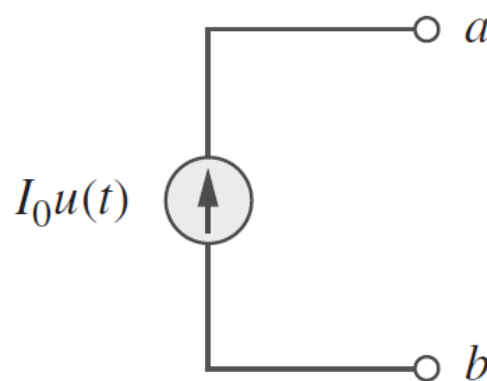
$$V_0 u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0, & t > 0 \end{cases}$$



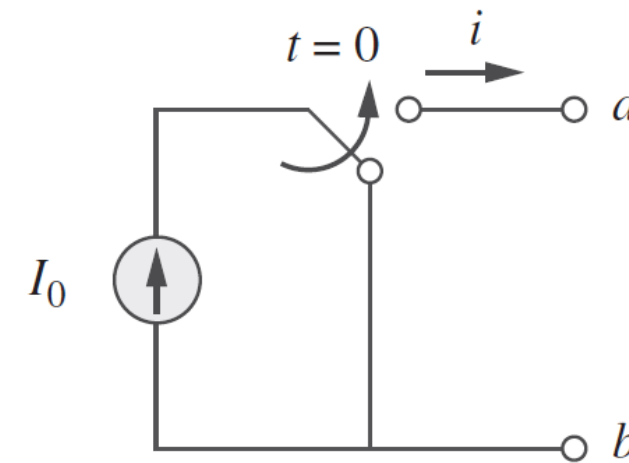
=



$$I_0 u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$



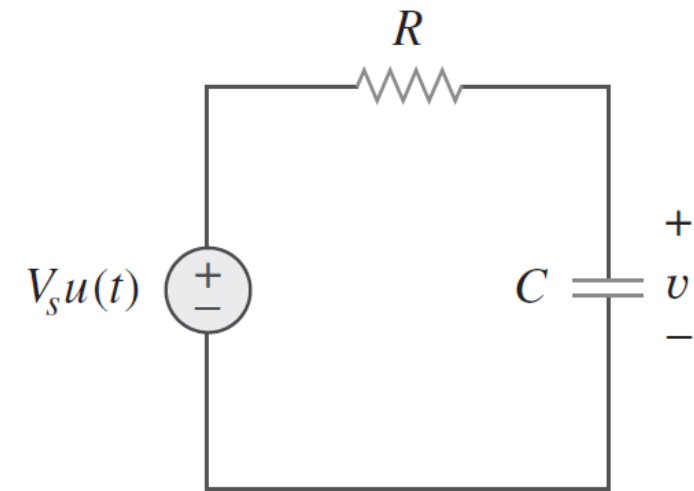
=



Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Considerando uma fonte de tensão CC.

LKC $i_C + i_R = 0$ $i_C = C \frac{dv}{dt}$ $i_R = \frac{v - V_S u(t)}{R}$ $C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_S u(t)}{R} = 0$



$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{V_S}{RC} u(t)$$

$t < 0$ $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0$

$t > 0$ $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{V_S}{RC}$

Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Considerando uma fonte de tensão CC.

Condição inicial e final

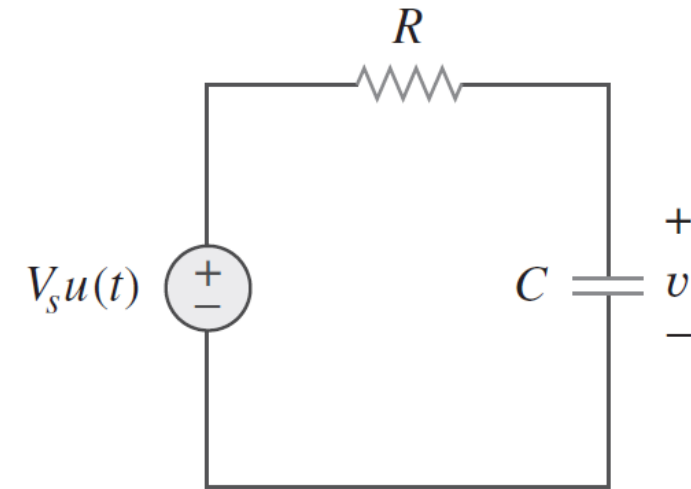
$$v(0) = 0 \text{ V}$$

$$v(\infty) = V_S \text{ V}$$

Entre a condição inicial e final existe o **PERÍODO TRANSIENTE**, no qual a corrente e a tensão no circuito variam

$$t > 0 \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{V_S}{RC}$$

Necessário resolver a Equação Diferencial Não-Homogênea



Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

Princípio da Superposição.

$$t > 0 \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = \frac{V_S}{RC}$$

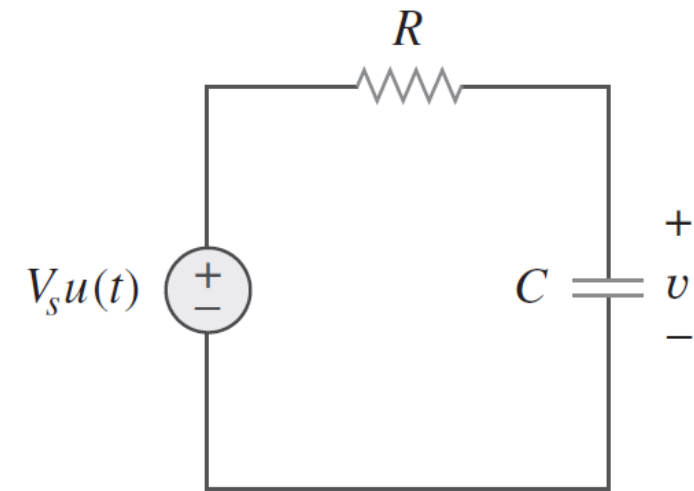
A solução $v(t)$ para a equação diferencial pode ser obtida através da somatória da **RESPOSTA FORÇADA** $v_f(t)$ e da **RESPOSTA NATURAL** $v_n(t)$

$$v(t) = v_f(t) + v_n(t)$$

$v_f(t)$ – A resposta forçada ignora o armazenamento da energia e define o comportamento do circuito na condição inicial e na condição de estabilidade

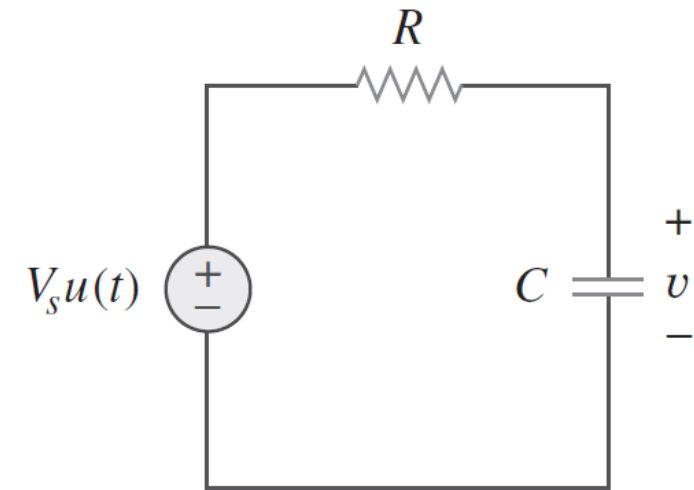
$v_n(t)$ – A resposta natural considera os elementos de armazenamento de energia e define o comportamento do circuito durante o período transiente.

$v(t)$ – O princípio da superposição garante a solução total.



Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

Resposta Forçada (v_f).



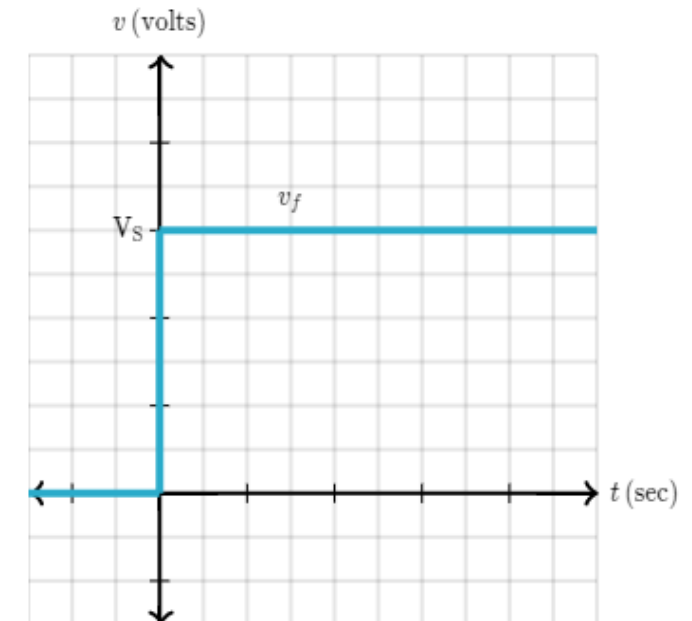
$$t > 0 \quad \frac{dv_f}{dt} + \frac{1}{RC} v_f = \frac{V_S}{RC}$$

$v_f(t)$ é obtida desconsiderando-se a característica de armazenamento de energia do capacitor.

Função Teste Constante $v_f(t) = K_f$

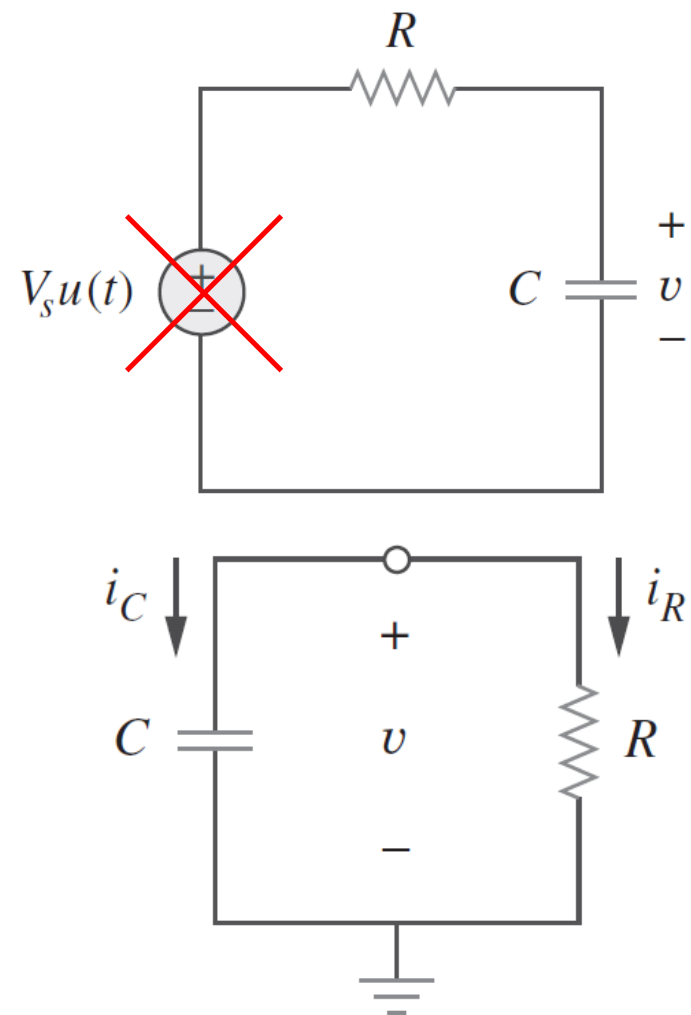
$$\frac{dK_f}{dt} + \frac{1}{RC} K_f = \frac{V_S}{RC} \quad \frac{dK_f}{dt} = 0$$

$$\frac{K_f}{RC} = \frac{V_S}{RC} \quad v_f(t) = K_f = V_S$$



Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

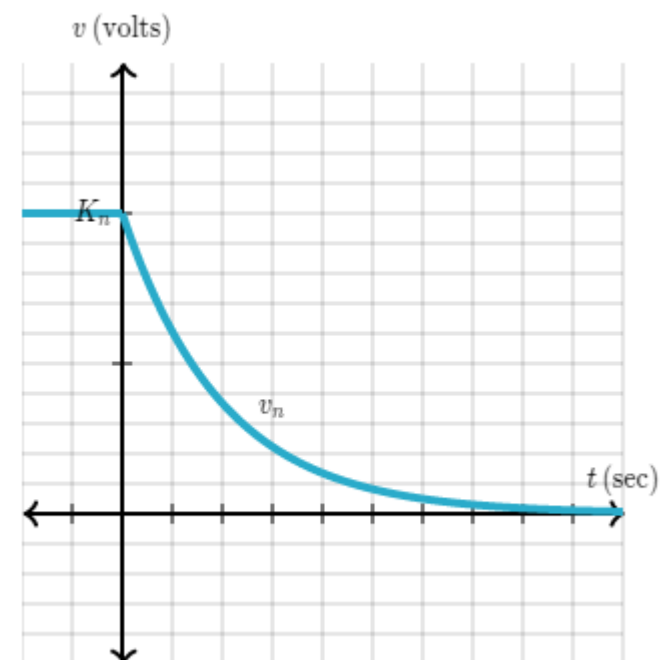
Resposta Natural (v_n).



$$t > 0 \quad \frac{dv_n}{dt} + \frac{1}{RC} v_n = 0$$

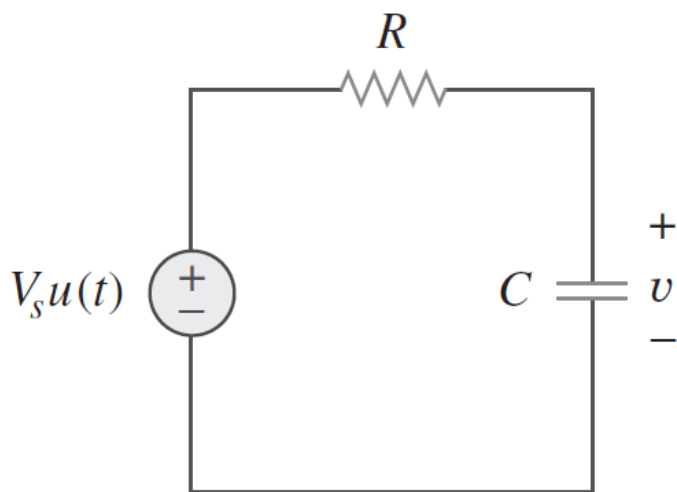
$v_n(t)$ é obtida considerando nula a excitação do circuito

$$v_n(t) = K_n e^{-\frac{t}{RC}}$$



Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total (v).



$$v(t) = v_f(t) + v_n(t)$$

$$v_f(t) = K_f = V_S \quad v_n(t) = K_n e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t) = V_S + K_n e^{-\frac{t}{RC}}$$

A tensão inicial no capacitor é V_0

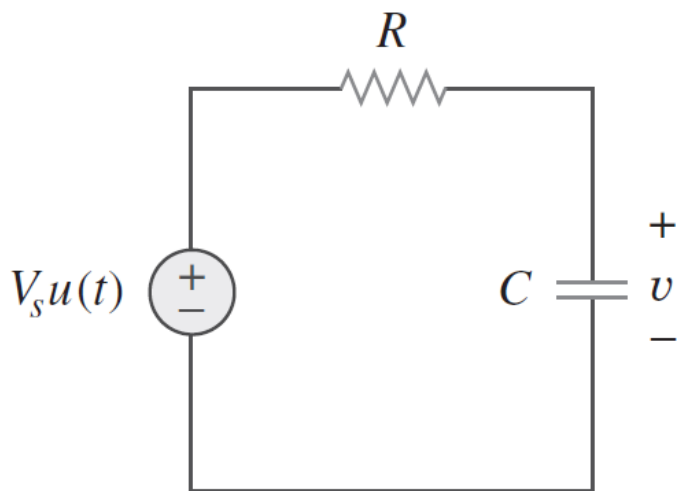
$$v(0) = V_0$$

$$V_S + K_n e^{-\frac{0}{RC}} = V_0 \quad V_S + K_n = V_0 \quad K_n = V_0 - V_S$$

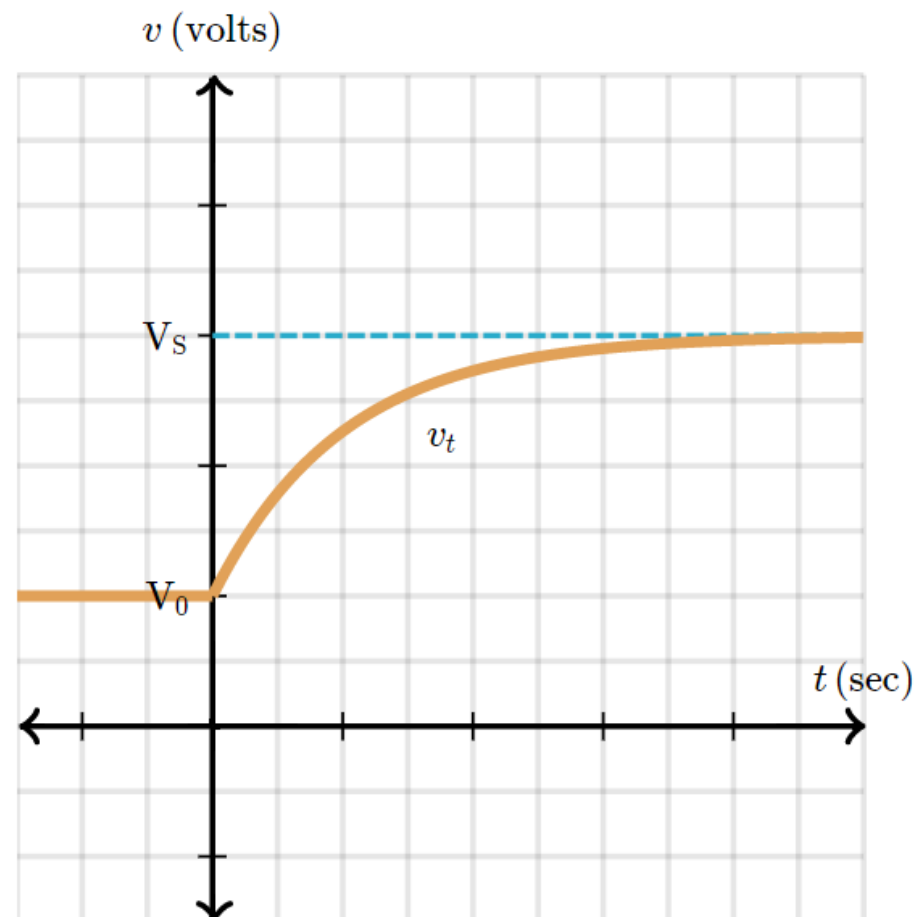
$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

Resposta total (v).

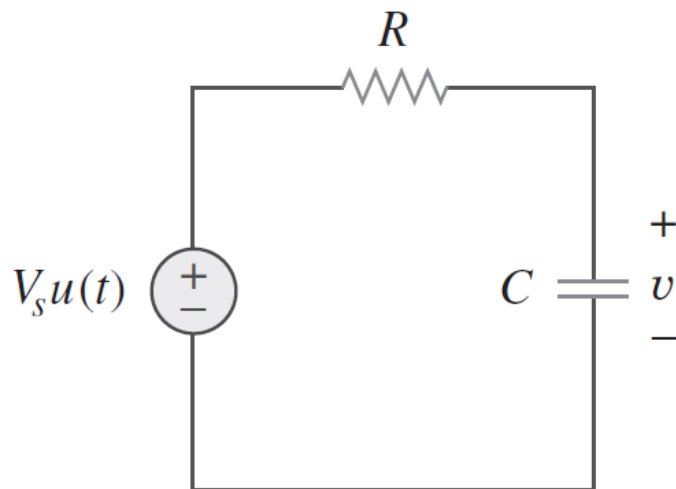


$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/RC}$$

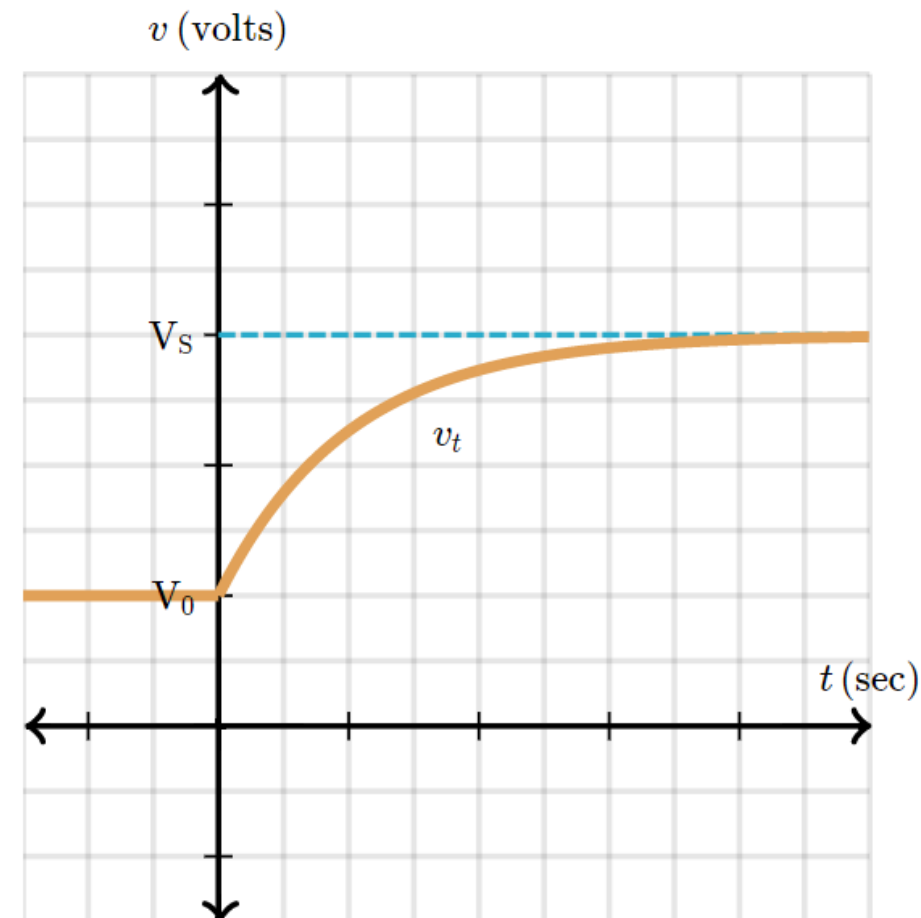


Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

Resposta total (v).

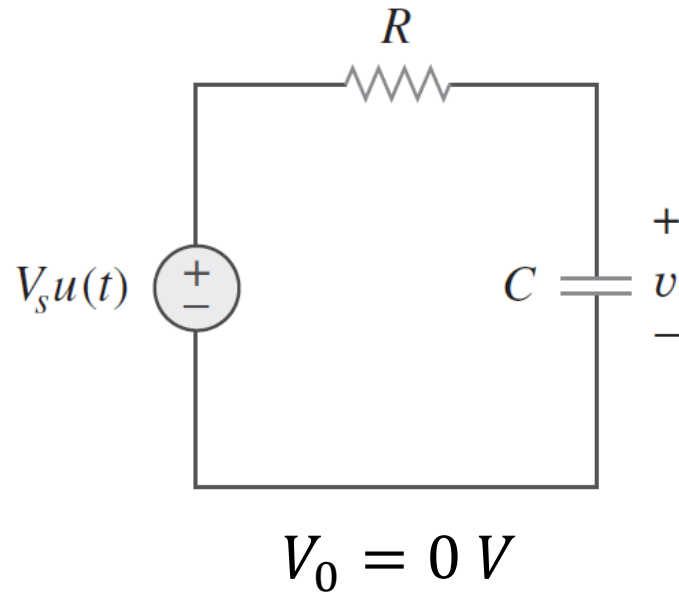


$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/RC}, & t > 0 \end{cases}$$

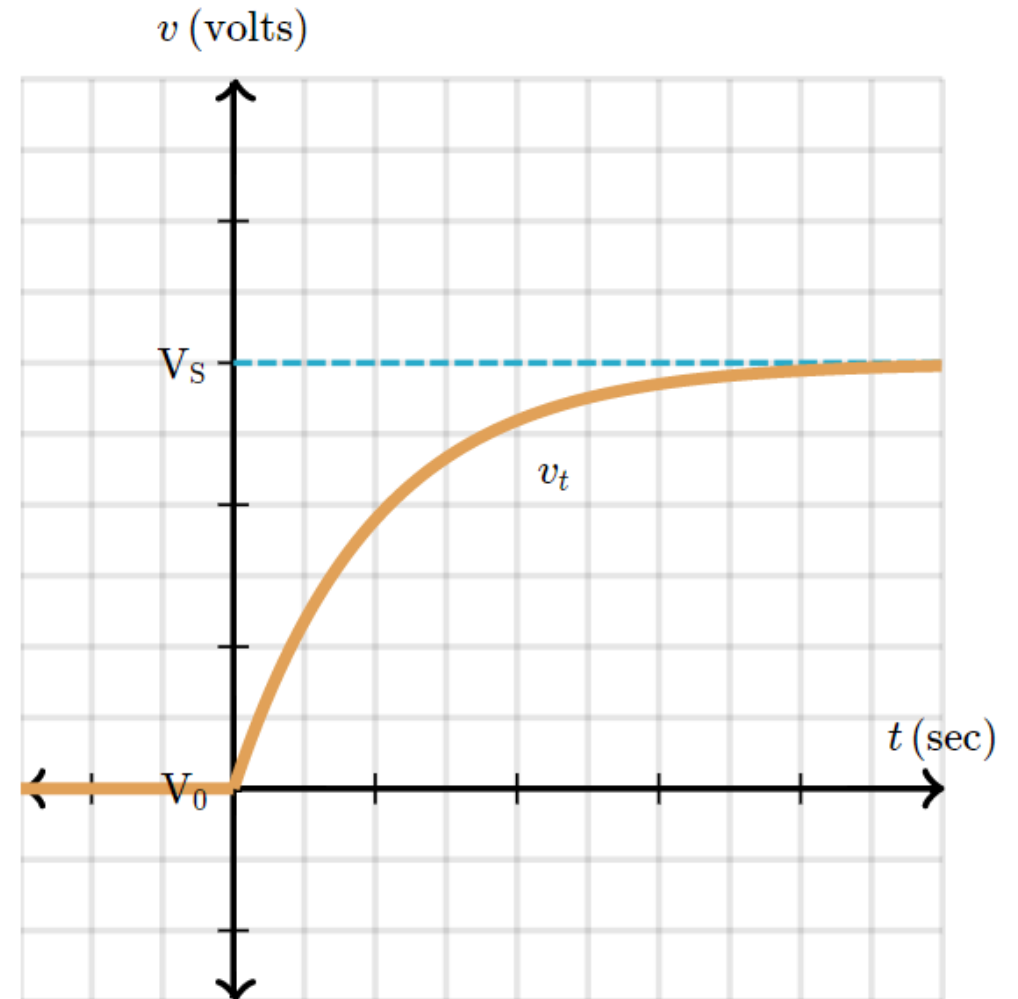


Circuito RC: Resposta à Função Degrau Unitário

Resposta total (v).

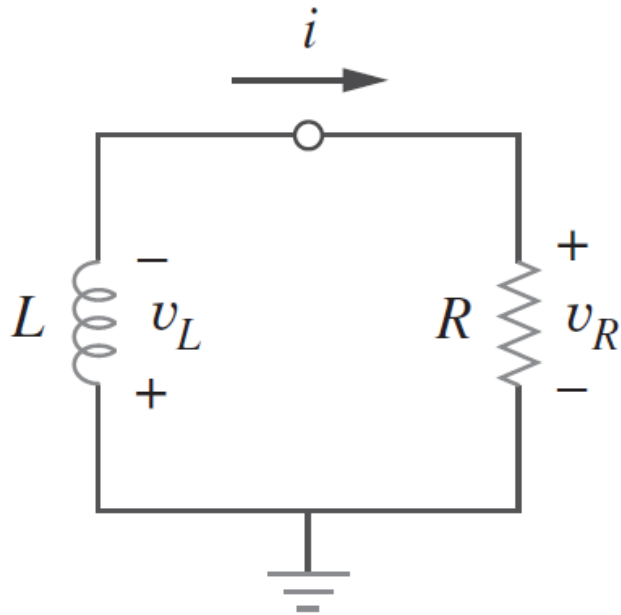


$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_s(1 - e^{-t/RC}), & t > 0 \end{cases}$$



Circuito RL: Resposta Natural

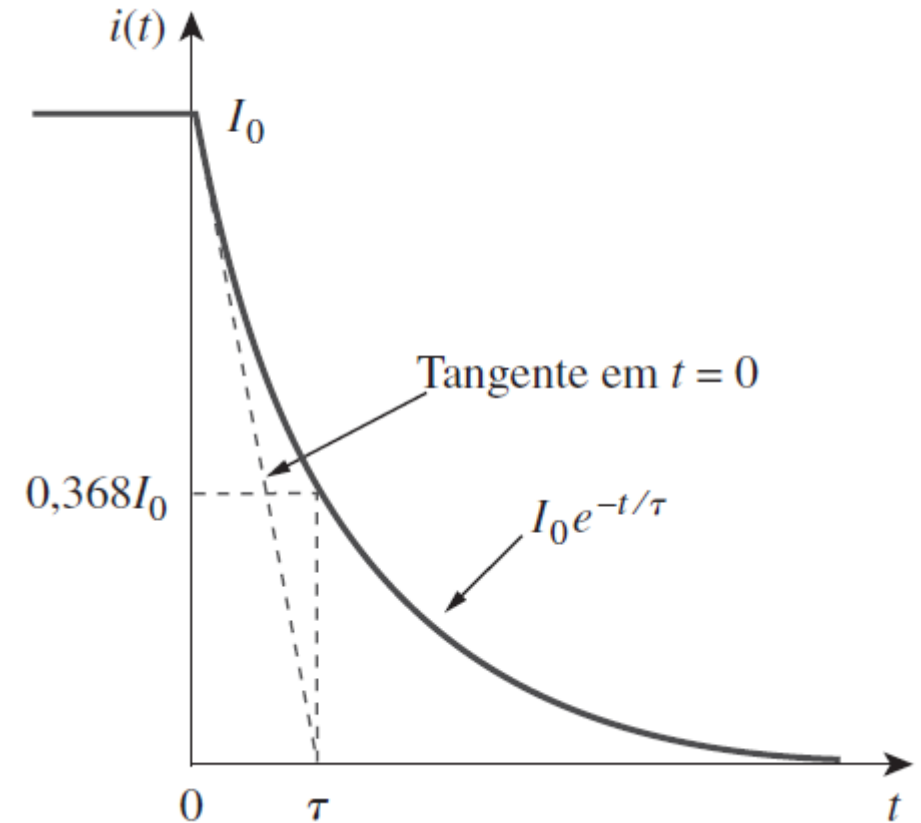
- Resposta de um circuito RL sem fonte, considerando o indutor inicialmente energizado e com corrente inicial I_0 .



$$i(t) = I_0 e^{-tR/L}$$

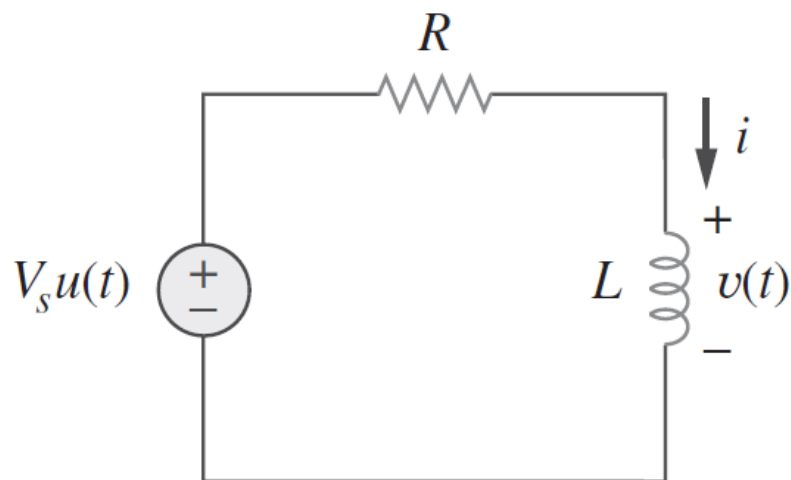
$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

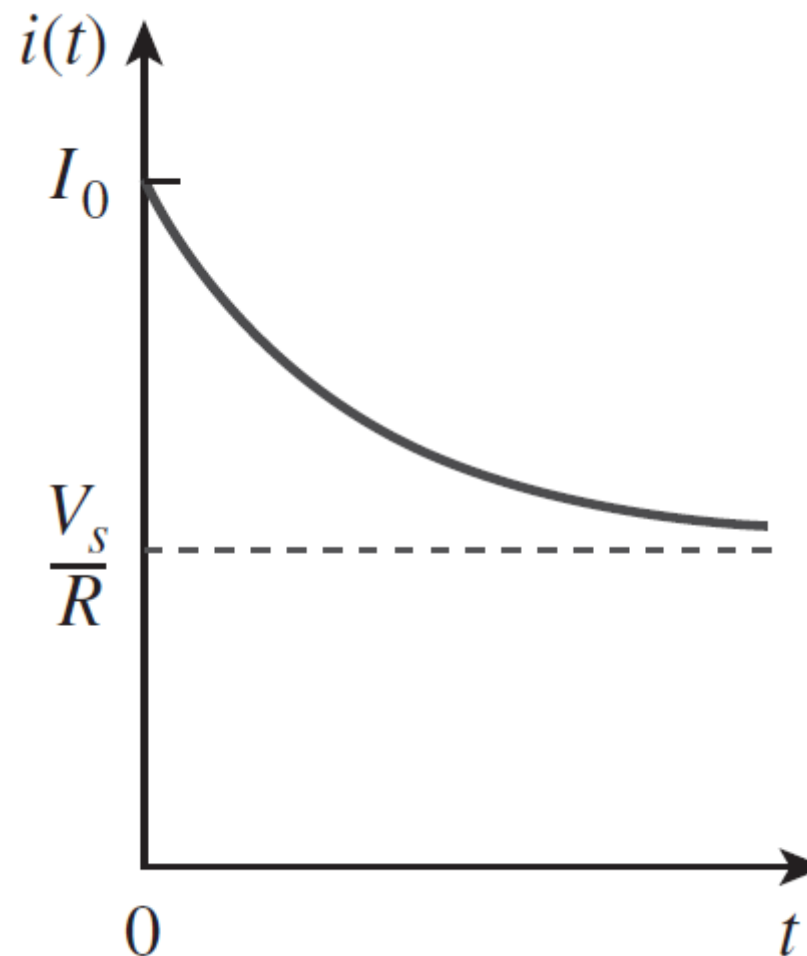


Circuito RL: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total $i(t)$.

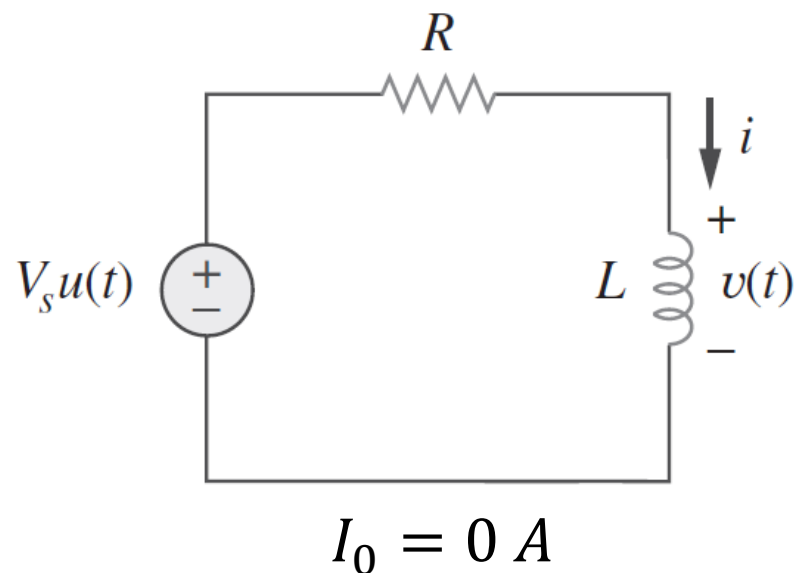


$$i(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-tR/L}, & t > 0 \end{cases}$$

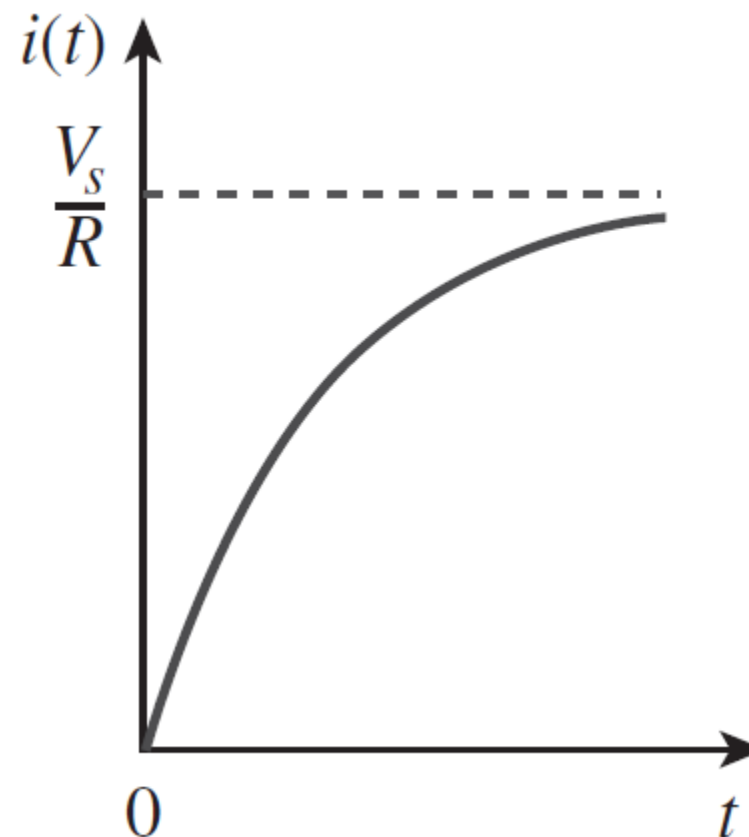


Circuito RL: Resposta à Função Degrau Unitário

□ Resposta total $i(t)$.

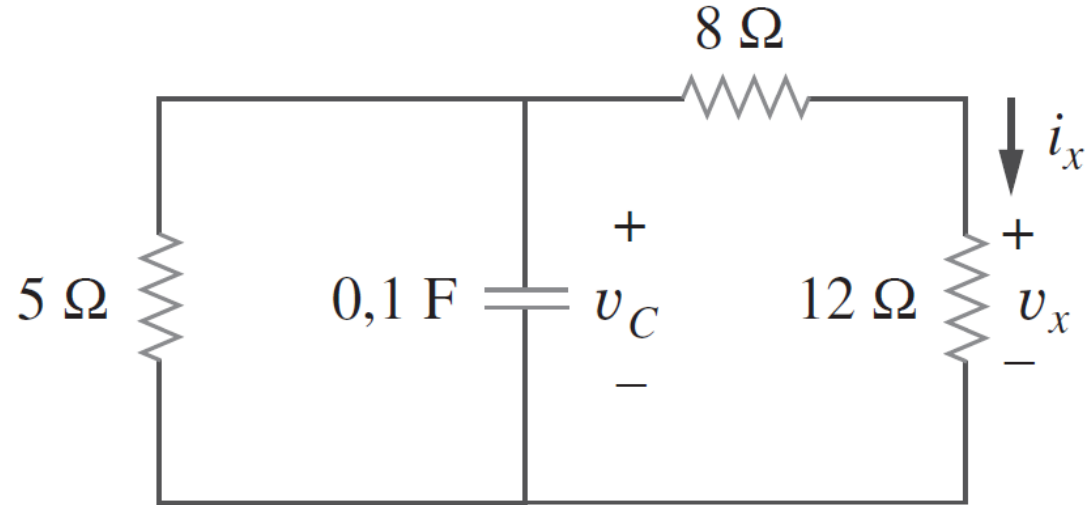


$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} (1 - e^{-tR/L}), & t > 0 \end{cases}$$



Exercícios Propostos

1 – Considerando $v(0) = 15V$ encontre v_C , v_x e i_x .



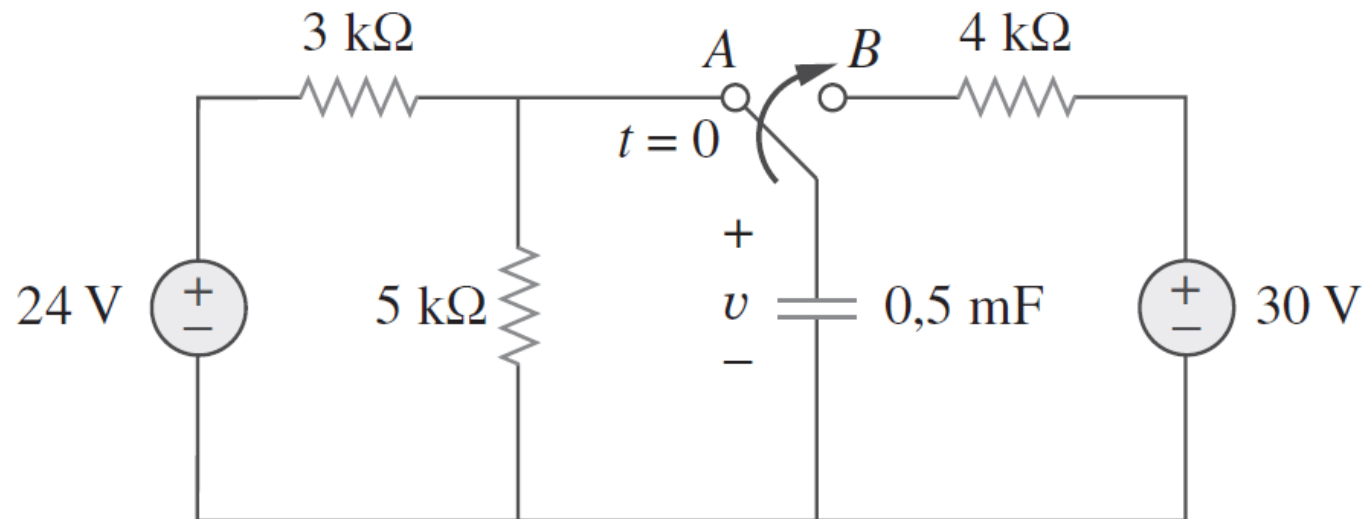
$$v_C = 15e^{-2,5t} V$$

$$v_x = 9e^{-2,5t} V$$

$$i_x = 0,75e^{-2,5t} A$$

Exercícios Propostos

- 2 – A chave se encontra na posição A por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave é mudada para a posição B. Determine $v(t)$ para $t > 0$ e calcule seu valor em $t = 1\text{ s}$ e $t = 4\text{ s}$.

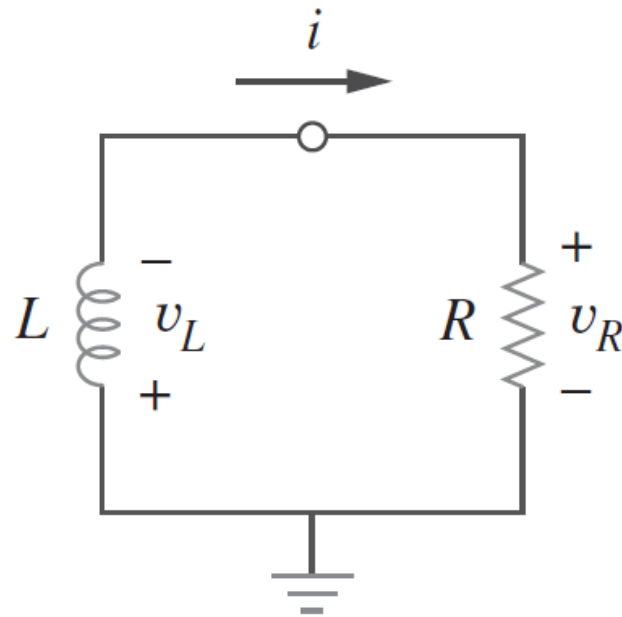


$$v(t) = 30 - 15e^{-0,5t} \text{ V}$$

$$v(1) = 20,9 \text{ V}$$

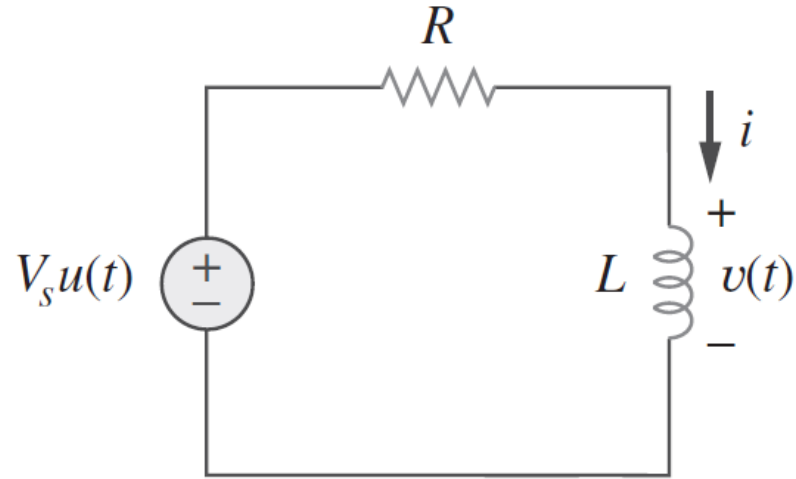
$$v(4) = 27,97 \text{ V}$$

3 – Derive a resposta natural $i(t)$ para o circuito RL.



$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

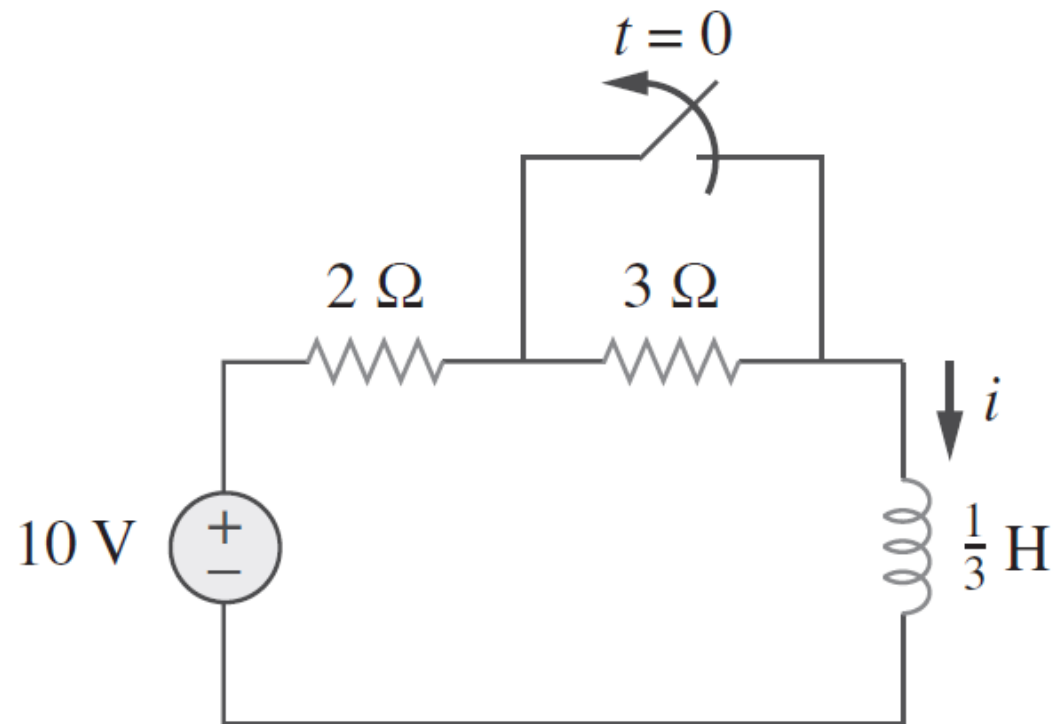
4 – Derive a resposta ao degrau unitário $i(t)$ para o circuito RL.



$$i(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R} \right) e^{-tR/L}, & t > 0 \end{cases}$$

Exercícios Propostos

- 5 – Determine $i(t)$ no circuito abaixo para $t > 0$ supondo que a chave tenha permanecido fechada por um longo tempo quando $t < 0$.



$$i(t) = 2 + 3e^{-15t} \text{ A}$$

- ❑ J. W. Nilsson, e S. A. Riedel, “Electric Circuits”, 9 ed., New York, Prentice Hall (2011).
- ❑ W. H. Hyat, J. E. Kemmerly, e S. M Durbin, “Análise de Circuitos em Engenharia”, 7 ed., São Paulo, McGraw-Hill (2008).
- ❑ C. K. Alexander, e M. N. O. Sadiku, “Fundamentos de Circuitos Elétricos”, 5 ed., Porto Alegre, AMGH (2013).
- ❑ M. N. O. Sadiku, “Elementos de Eletromagnetismo”, 3 ed., Porto Alegre, Bookman (2004).