- **Paradoxo do carrossel**

Seja $\{e^a_\mu\}$ a base tetrada associada à família de observadores $\mathcal{O}$ em relação à qual o centro do carrossel está em repouso e a velocidade angular de seu perímetro vale Ω. Escolhendo um evento qualquer no centro do carrossel como referência para localizar outros eventos através de 4-vetores ("segmentos orientados"), o cilindro espaço-temporal varrido pelo perímetro do carrossel é dado por:

$$S^a(t,\theta) = ct\, e^a_0 + R\cos\theta\, e^a_1 + R\sin\theta\, e^a_2 \quad , \quad t,\theta \in \mathbb{R} \qquad (R = \text{constante} > 0)$$

Qualquer curva contida nesse cilindro pode ser caracterizada por uma equação vinculando θ e/ou t : $F(t,\theta) = 0$.

→ *Linhas-de-mundo de $\tilde{\mathcal{O}}$*

As linhas-de-mundo dos observadores $\tilde{\mathcal{O}}$ são determinadas pela família de vínculos

$$F_{\theta_0}(t,\theta) := \theta - \theta_0 - \Omega t = 0 \quad , \text{ onde } \theta_0 \in [0, 2\pi) \text{ indexa cada linha-de-mundo}$$

(ou seja $\theta(t) = \theta_0 + \Omega t$ (I))

Para uso mais abaixo, calculemos o campo de 4-velocidades de $\tilde{\mathcal{O}}$:

$$\tilde{u}^a = \frac{dS^a(t(\tau),\theta(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial S^a}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial S^a}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\tau} = c\,e^a_0\left(\frac{dt}{d\tau}\right) + R\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)\left(-\sin\theta\, e^a_1 + \cos\theta\, e^a_2\right) =$$

$$= \frac{dt}{d\tau}\left[c\,e^a_0 + R\Omega\left(-\sin\theta\, e^a_1 + \cos\theta\, e^a_2\right)\right] \quad , \text{ onde usamos que } \frac{d\theta}{dt} = \Omega \text{ p/ cada}$$

linha-de-mundo de $\tilde{\mathcal{O}}$. A condição de normalização $g_{ab}\tilde{u}^a\tilde{u}^b = -c^2$ leva a:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R^2\Omega^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\tilde{u}^a = \gamma\left[c\,e_0^a + R\Omega\left(-\sin\theta\, e_1^a + \cos\theta\, e_2^a\right)\right]}$$

→ <u>Campo de direções espaciais segundo $\tilde{\mathcal{O}}$</u>

Dado um evento qualquer da folha-de-mundo $s^a(t,\theta)$, um 4-vetor $\tilde{l}^a$ puramente espacial para $\tilde{\mathcal{O}}$ passando por esse evento satisfaz $\tilde{l}^a\tilde{u}_a = 0$. Se estivermos interessados apenas na direção espacial ao longo do perímetro do carrossel, então

$$\tilde{l}^a = \frac{ds^a(t(l),\theta(l))}{dl} = \frac{\partial s^a}{\partial t}\frac{dt}{dl} + \frac{\partial s^a}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dl} = c\,e_0^a\frac{dt}{dl} + R\frac{d\theta}{dl}\left(-\sin\theta\, e_1^a + \cos\theta\, e_2^a\right),$$

onde, até aqui, l é um parâmetro arbitrário. Da eq. $\tilde{l}^a\tilde{u}_a = 0$, temos:

$$-c^2\frac{dt}{dl} + R^2\Omega\frac{d\theta}{dl} = 0$$

Da eq. acima já conseguimos a equação da curva puramente espacial:

$$R^2\Omega\frac{d\theta}{dl} = c^2\frac{dt}{dl} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{c^2}{R^2\Omega} \Leftrightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \frac{c^2 t}{R^2\Omega}} \quad \text{(II)}$$

Se fizermos questão de usar como parâmetro o comprimento de arco l, basta normalizarmos $\tilde{l}^a$:

$$\tilde{l}^a\tilde{l}_a = 1 \Leftrightarrow -c^2\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{dt}{dl}\right)^2\left[-c^2 + \frac{R^2c^4}{R^4\Omega^2}\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dt}{dl}\right)^2\frac{c^4}{R^2\Omega^2}\left(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{dt}{dl}\right)^2 = \gamma^2\frac{R^2\Omega^2}{c^4} \overset{dt/dl>0}{\Leftrightarrow} \frac{dt}{dl} = \gamma\frac{R\Omega}{c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t = \gamma\frac{R\Omega}{c^2}\, l}$$ (medindo l a partir de $t=0$) (III)

Substituindo (III) em (II) e, depois, em $S^a(t(l), \theta(l))$ temos a família de curvas

$$\boxed{S^a_{\theta_0}(l) = \gamma\frac{R\Omega}{c}\, l\, e^a_0 + R\cos\left(\theta_0 + \frac{\gamma l}{R}\right)e^a_1 + R\sin\left(\theta_0 + \frac{\gamma l}{R}\right)e^a_2}$$ (IV)

Podemos extrair da Eq. (IV) que se os observadores $\tilde{O}$ tentarem inferir o perímetro do carrossel como o comprimento da curva acima iniciando e terminando no <u>mesmo observador inercial</u> ($\Delta\theta = 2\pi$), eles obterão:

$$\gamma\frac{\Delta l}{R} = 2\pi \Leftrightarrow \Delta l = \frac{2\pi R}{\gamma}$$ (como antecipado na discussão do "paradoxo" nas notas de aula)

→ <u>Perímetro do carrossel segundo $\tilde{O}$</u>

Como discutido nas notas de aula, a maneira mais natural de $\tilde{O}$ inferir o perímetro do carrossel é medir o comprimento da curva espacial acima num pedaço que comece e termine no mesmo observador de $\tilde{O}$ (e não de O, como feito no quadro acima). Para isso, temos que determinar a intersecção da linha-de-mundo de, digamos, $\tilde{O}_0$ [$\theta_0 = 0$ em (I)] e da curva espacial acima. Escolhendo a curva espacial que começa em $\tilde{O}_0$ em $t=0$ [$\theta_0 = 0$ em (II)], determinamos a próxima intersecção fazendo (entenda o porquê olhando a figura das notas de aula)

$$\theta_{(II)}(t) - \theta_{(I)}(t) = 2\pi \iff \frac{c^2 t}{R^2\Omega} - \Omega t = 2\pi \iff \frac{c^2 \Omega t}{R^2\Omega^2}\left(1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}\right) = 2\pi \iff$$

$$\iff \boxed{t = \frac{2\pi\gamma^2}{\Omega}\frac{R^2\Omega^2}{c^2}}$$

Substituindo o valor de t encontrado acima na relação entre t e τ, temos que o intervalo de tempo-próprio decorrido para $\tilde{O}_0$ entre essas intersecções (p e r na figura das notas de aula) vale

$$\boxed{\Delta\tau = \frac{2\pi\gamma}{\Omega}\frac{R^2\Omega^2}{c^2}}$$ (Dessincronização no ref. do carrossel)

Além disso, usando a Eq. (III), vemos que o comprimento da curva espacial entre essas intersecções vale

$$\boxed{\Delta l = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{\gamma R\Omega}}\left(\frac{2\pi\gamma^{\cancel{2}} R^{\cancel{2}}\Omega^{\cancel{2}}}{\cancel{\Omega}\,\cancel{c^2}}\right) = 2\pi\gamma R}$$ (Perímetro do carrossel de acordo com $\tilde{O}$)

Obs.: Nas notas de aula é pedido o valor do intervalo invariante entre p e r, sugerindo que esse valor poderia fornecer a dessincronia calculada acima. É importante perceber que enquanto o resultado acima para a dessincronização é exata, o intervalo invariante entre p e r fornece um valor aproximado para a mesma dessincronização:

$$I(p,r) = g_{ab}\, \Delta s^a \Delta s^b \,, \quad \text{onde} \quad \Delta s^a = s^a\Big|_{\ell=2\pi\gamma R} - s^a\Big|_{\ell=0} \qquad [s^a(\ell) \text{ dado em (IV)}]$$

- $$\Delta s^a = \frac{2\pi\gamma^2 R^2 \Omega}{c}\, e_0^a + R\left[\cos(2\pi\gamma^2) - 1\right] e_1^a + R \sin(2\pi\gamma^2)\, e_2^a =$$

$$= \frac{2\pi\gamma^2 R^2 \Omega}{c}\, e_0^a + 2R\sin(\pi\gamma^2)\left[-\sin(\pi\gamma^2)\, e_1^a + \cos(\pi\gamma^2)\, e_2^a\right]$$

- $$I(p,r) = 4R^2\left[-\pi^2\gamma^4 \frac{R^2\Omega^2}{c^2} + \sin^2(\pi\gamma^2)\right] = -4\pi^2\gamma^4 R^2\left[\frac{R^2\Omega^2}{c^2} - \frac{\sin^2(\pi\gamma^2)}{(\pi\gamma^2)^2}\right]$$

O intervalo de tempo $\Delta t'$ decorrido entre p e r para um observador inercial passando por ambos é dado por

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\sqrt{-I(p,r)}}{c} = \frac{2\pi\gamma^2 R}{c}\sqrt{\frac{R^2\Omega^2}{c^2} - \frac{\sin^2(\pi\gamma^2)}{(\pi\gamma^2)^2}}}$$

Note que para $\frac{\Omega R}{c} \ll 1$,
$$\begin{cases} \Delta t' = \dfrac{2\pi}{\Omega}\left[\left(\dfrac{\Omega R}{c}\right)^2 + O\left((\Omega R/c)^3\right)\right] \\[2ex] \Delta \tau = \dfrac{2\pi}{\Omega}\left[\left(\dfrac{\Omega R}{c}\right)^2 + O\left((\Omega R/c)^3\right)\right] \end{cases}.$$

Ou seja $\Delta t' \simeq \Delta \tau$.