Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Polinômios Ortogonais

Nelson Kuhl

IME/USP

29 de setembro de 2020

Produtos internos

Devido á sua importância, estudaremos em mais detalhes famílias de polinômios ortogonais. Primeiramente, vamos especificar os produtos internos.

Produtos internos

Devido á sua importância, estudaremos em mais detalhes famílias de polinômios ortogonais. Primeiramente, vamos especificar os produtos internos.

- **Domínios discretos** São dados n pontos distintos $\{x_i\}_{i=1}^n$ e n números *positivos* (pesos) $\{\omega_i\}_{i=1}^n$. O produto interno é definido por

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \omega_i u(x_i) v(x_i) \tag{1}$$

Produtos internos

Devido á sua importância, estudaremos em mais detalhes famílias de polinômios ortogonais. Primeiramente, vamos especificar os produtos internos.

- **Domínios discretos** São dados n pontos distintos $\{x_i\}_{i=1}^n$ e n números *positivos* (pesos) $\{\omega_i\}_{i=1}^n$. O produto interno é definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \omega_i u(x_i) v(x_i) \tag{1}$$

- **Domínios contínuos** Dados $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e uma função peso $\omega(x)$ contínua e positiva em (a, b), e tal que $\int_a^b \omega(x) p(x)\, dx$ existe para qualquer polinômio $p(x)$, o produto interno é definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b \omega(x) u(x) v(x)\, dx \tag{2}$$

Observações

1. No caso de domínios discretos, a expressão (1) define um produto interno somente se o grau dos polinômios for menor ou igual a $n-1$. Portanto neste caso nos restrigiremos ao espaço $\mathcal{P}_{n-1}$;

Observações

1. No caso de domínios discretos, a expressão (1) define um produto interno somente se o grau dos polinômios for menor ou igual a $n-1$. Portanto neste caso nos restrigiremos ao espaço $\mathcal{P}_{n-1}$;
2. para domínios contínuos, a expressão (2) define um produto interno em todo o espaço $\mathcal{P}$ dos polinômios. Além disso, a pode ser $-\infty$ e/ou b pode ser ∞. Vimos exemplos na aula anterior;

Observações

1. No caso de domínios discretos, a expressão (1) define um produto interno somente se o grau dos polinômios for menor ou igual a $n-1$. Portanto neste caso nos restrigiremos ao espaço $\mathcal{P}_{n-1}$;
2. para domínios contínuos, a expressão (2) define um produto interno em todo o espaço $\mathcal{P}$ dos polinômios. Além disso, a pode ser $-\infty$ e/ou b pode ser ∞. Vimos exemplos na aula anterior;
3. dada uma família $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, de polinômios ortogonais relativamente a (1) ou (2), os primeiros $m+1$ polinômios $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ formam uma base para $\mathcal{P}_m$ (com m no máximo $n-1$ no caso discreto). De fato, lembre-se que o grau de p_k é k.

Observações

1. No caso de domínios discretos, a expressão (1) define um produto interno somente se o grau dos polinômios for menor ou igual a $n-1$. Portanto neste caso nos restrigiremos ao espaço $\mathcal{P}_{n-1}$;
2. para domínios contínuos, a expressão (2) define um produto interno em todo o espaço $\mathcal{P}$ dos polinômios. Além disso, a pode ser $-\infty$ e/ou b pode ser ∞. Vimos exemplos na aula anterior;
3. dada uma família $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots,$ de polinômios ortogonais relativamente a (1) ou (2), os primeiros $m+1$ polinômios $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ formam uma base para $\mathcal{P}_m$ (com m no máximo $n-1$ no caso discreto). De fato, lembre-se que o grau de p_k é k.
4. **daqui em diante**, quando nos referirmos a uma família de polinômios ortogonais, assumiremos que um produto interno da forma (1) ou (2) está sendo usado.

Propriedades

Propriedade 1

Se $\{p_k\}$ é uma família de polinômios ortogonais e $p(x)$ é um polinômio de grau m, então p pode ser representado de maneira única por

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x) \tag{3}$$

onde

$$c_k = \frac{\langle p_k, p \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle}.$$

Propriedades

Demonstração

De fato, como $\{p_k\}_{k=0}^m$ é uma base para $\mathcal{P}_m$, temos a representação (3). Fazendo-se o produto interno desta expressão por p_j, onde $0 \leq j \leq m$, obtemos

$$\langle p_j, p\rangle = \langle p_j, \sum_{k=0}^{m} c_k p_k\rangle = \sum_{k=0}^{m} c_k \langle p_j, p_k\rangle = c_j \langle p_j, p_j\rangle,$$

onde usamos o fato de que $\langle p_k, p_j\rangle = 0$ se $k \neq j$. $\square$

Propriedades

Propriedade 2

Se $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ é uma família de polinômios ortogonais e $p(x)$ é um polinômio de grau m, então $\langle p_j, p \rangle = 0$ para todo $j > m$.

Demonstração

Usando (3) e fazendo-se o produto interno por p_j obtemos

$$\langle p_j, p \rangle = \sum_{k=0}^{m} c_k \langle p_j, p_k \rangle = 0$$

pois como $j > m$, então $j \neq k$ para todo $0 \leq k \leq m$. $\square$

Propriedades

Propriedade 3

Se $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ são duas famílias de polinômios ortogonais relativamente ao **mesmo produto interno**, então existem únicos números reais $\lambda_k \neq 0$ tais que $q_k(x) = \lambda_k p_k(x)$.

Demonstração

Como q_k é um polinômio de grau k, temos da Propriedade 1 que $q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\langle p_j, q_k \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j(x)$. Usando a Propriedade 2 para a família $\{q_k\}$ concluímos que $\langle p_j, q_k \rangle = 0$ para $j < k$ e portanto

$$q_k(x) = \lambda_k p_k(x) \quad \text{com } \lambda_k = \frac{\langle p_k, q_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} \neq 0$$

uma vez que p_k e q_k são polinômios de grau k.

Polinômios mônicos

Em algumas situações é necessário sabermos contruir uma família de polinômios ortogonais. É claro que isso pode ser feito usando o Processo de Gram-Schmidt, mas polinômios ortogonais tem propriedades específicas que nos ajudam a derivar relações de recorrência de três termos. Faremos isso para os polinômios mônicos.

Definição 1

A família dos polinômios ortogonais mônicos em relação a um produto interno da forma (1) ou (2) é a família $\{p_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$ dos polinômios ortogonais em relação a este produto interno tal que o coeficiente de x^k de $p_k(x)$ é 1.

Polinômios mônicos

Para construir a família dos polinômios mônicos, usaremos idéias semelhantes ao processo de Gram-Schmidt, com a diferença de que não partimos de uma base dada. Claramente,

$$p_0(x) = 1.$$

Para obtermos $p_1(x)$, basta subtrairmos de x a sua projeção ortogonal na direção de p_0:

$$p_1(x) = x - \frac{\langle p_0, x\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0(x) = x - \frac{\langle p_0, x\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle}.$$

Suponha então que já tenhamos construído os polinômios ortogonais mônicos até o grau k. Note que $xp_k(x)$ é um polinômio mônico de grau $k+1$, mas não necessariamente ortogonal a $\{p_j\}_{j=0}^{k}$.

Polinômios mônicos

O polinômio p_{k+1} é então calculado subtraindo-se a projeção ortogonal de $xp_k(x)$ no subespaço gerado por $\{p_j\}_{j=0}^{k}$. Como estes polinômios já são ortogonais por construção temos

$$p_{k+1}(x) = xp_k(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\langle p_j, xp_k \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j(x).$$

Do formato dos produtos internos (1) e (2) temos

$$\langle p_j, xp_k \rangle = \langle xp_j, p_k \rangle = 0 \text{ se } j \leq k-2$$

onde usamos a Propriedade 2 juntamente com o fato de o grau de xp_j ser $j+1$.

Polinômios mônicos

Portanto,

$$p_{k+1}(x) = xp_k(x) - \frac{\langle p_k, xp_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} p_k(x) - \frac{\langle p_{k-1}, xp_k \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle} p_{k-1}(x).$$

Ainda podemos fazer uma simplificação adicional. Verifique como exercício a seguinte identidade:

$$\langle p_{k-1}, xp_k \rangle = \langle p_k, p_k \rangle.$$

Temos então a seguinte relação de recorrência de tres termos para gerar a família de polinômios ortogonais mônicos.

Polinômios mônicos

Relação de recorrência

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_1(x) &= x - \alpha_1 \\
p_k(x) &= (x - \alpha_k)p_{k-1}(x) - \beta_k p_{k-2}(x), \quad k \geq 2,
\end{aligned}
$$

onde

$$\alpha_k = \frac{\langle p_{k-1}, x p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}, \quad k \geq 1, \text{ e } \beta_k = \frac{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-2}, p_{k-2} \rangle}, \quad k \geq 2.$$