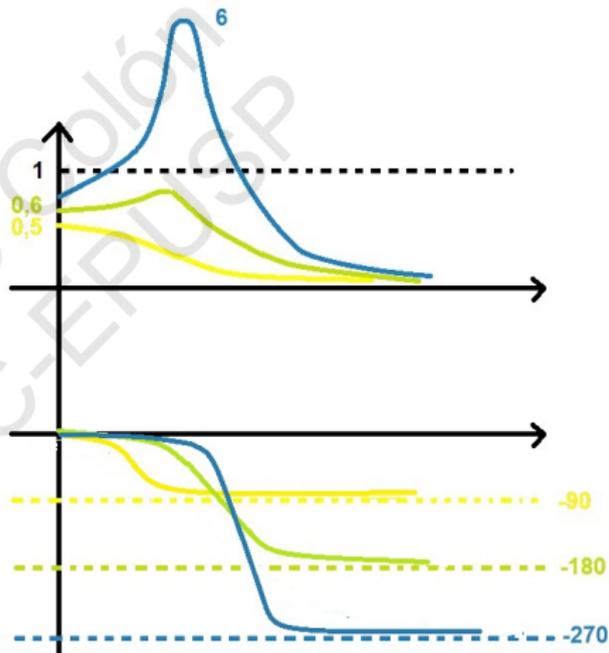
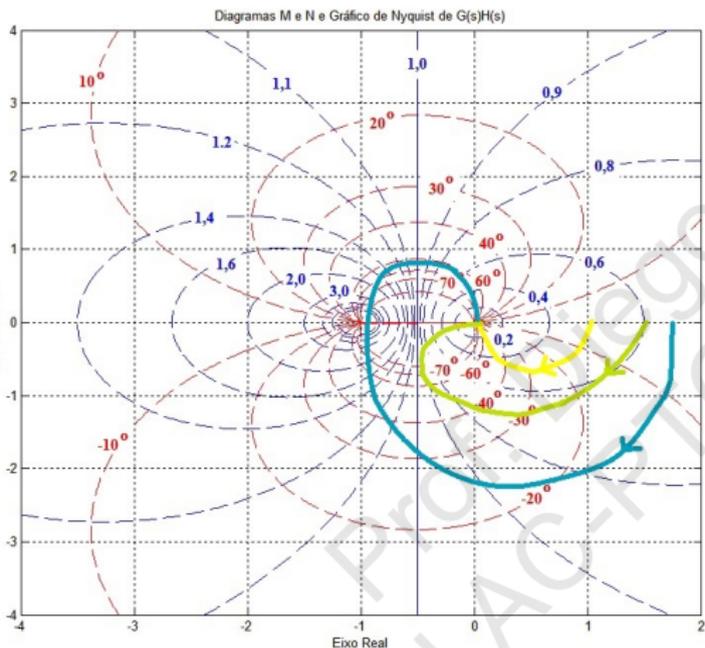


Controle H_∞ - Aula 3

Prof. Diego Colón

29 de setembro de 2020

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 7



Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 8

- **Nas baixas:** $T(j0) = L(j0)/(1 + L(j0))$. Para $\omega = 0$, as três curvas partem do semi-eixo real positivo. O LG de fase constante em malha fechada (em vermelho tracejado) que está em cima deste eixo é o correspondente a zero graus de MF.
- Quanto maior for $|L(j0)|$, o LG de ganho constante em MF (em azul tracejado) que corta a curva de Nyquist de L é cada vez mais próxima de 1.
- Isso indica também que se multiplicarmos L por um ganho $K > 0$, quanto maior for esse K , mais próximo $T(j0)$ será de 1.
- Pelo Teorema do Valor Final:

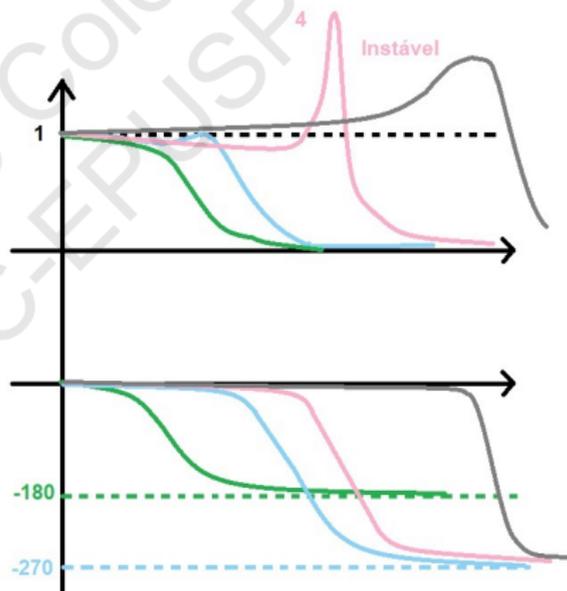
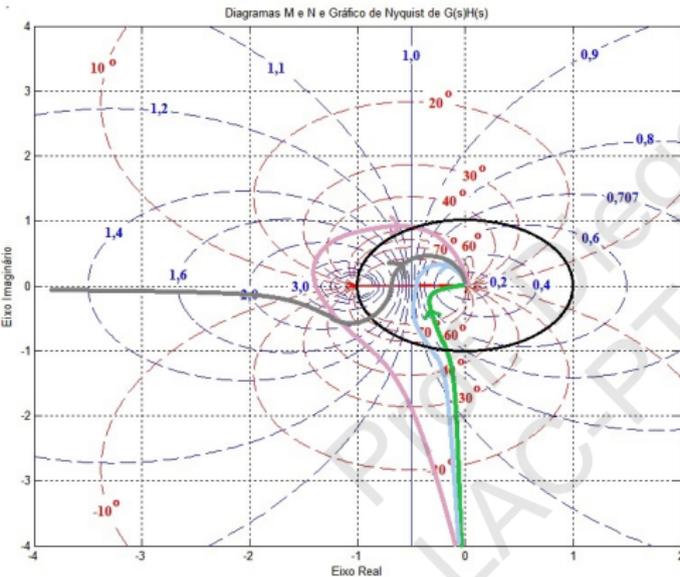
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)R(s)$$

e no caso de $R(s) = A/s$ (degrau de amplitude A), teremos que $e_{ss} = S(0)A = A(1 - T(0))$, ou seja, quanto mais próximo $T(0)$ for de 1, menor será o erro estacionário.

- Para valores um pouco maiores que $\omega = 0$, $|T(j\omega)| = |L(j\omega)|/|1 + L(j\omega)|$, podemos concluir que quanto maior for $|L(j\omega)|$, mais próximo $|T(j\omega)|$ vai ficar de 1.
- Em termos de fase, $\angle T(j\omega) = \angle L(j\omega) - \angle(L(j\omega) + 1)$ e quanto maior for $|L(j\omega)|$, temos que $|L(j\omega)| \simeq |1 + L(j\omega)|$ e, conseqüentemente, $\angle L(j\omega) \simeq \angle(L(j\omega) + 1)$, o que implica que $\angle T(j\omega) \simeq 0$ graus.
- De fato, quanto maior for a faixa de frequências onde $|T(j\omega)| \simeq 1$ e $\angle T(j\omega) \simeq 0$, melhor será a características de seguimento de referência que o sistema em MF possuirá.

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 10

Para os sistemas tipo 1, como $|L(j0)| = \infty$, tem-se que $|T(j0)| = 1$, e para as baixas frequências vale que $|T(j\omega) \simeq 1$.

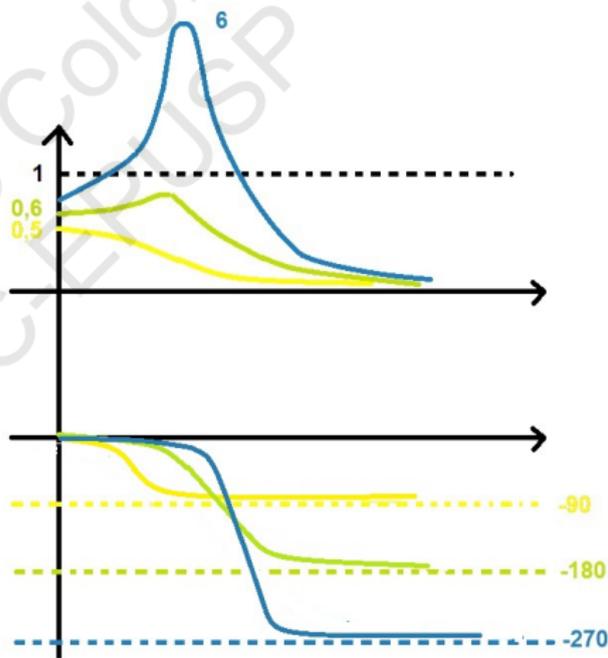
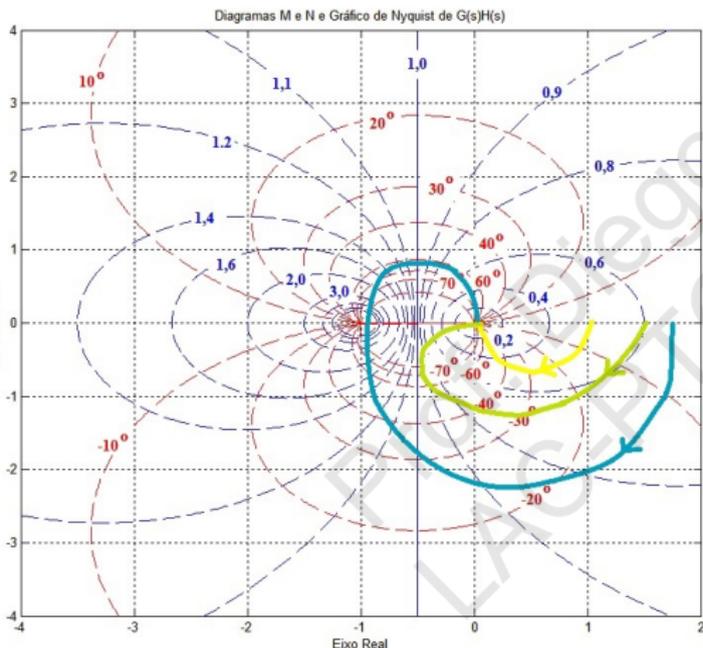


Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 11

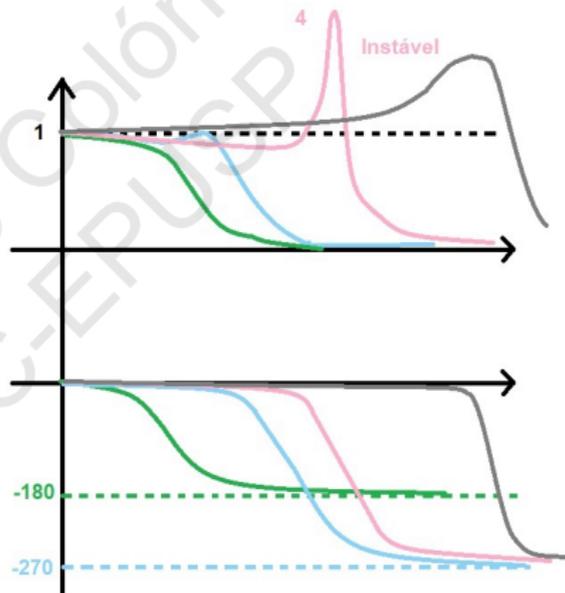
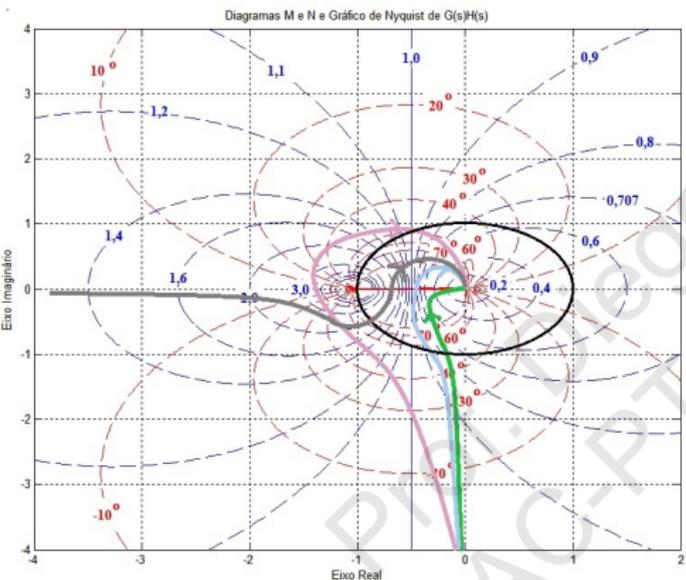
- **Nas altas frequências**, ou seja, para $\omega \rightarrow \infty$, o que se observa nos gráficos de Nyquist é que $|T(j\omega)|$ tende a zero para todos os gráficos, já que as curvas de Nyquist tendem para a origem.
- Os LG azuis tracejados que circundam a origem tem ganhos cada vez menores.
- Para o caso da curva amarela, a fase de malha fechada vai tender para o valor -90 graus. Para o caso da curva verde, a fase fica menor que isto, e se aproxima de -180 graus, já que se aproxima do eixo real.
- Para o caso azul, a curva ultrapassa o eixo real (ou seja, cruza o segmento ± 180) e acaba assumindo valores até $90 = -270$ graus. De fato, como $|L(j\omega)| \rightarrow 0$, $|L(j\omega) + 1| \rightarrow 1$, logo $|T(j\omega)| \simeq |L(j\omega)|$. Da mesma forma, tem-se que $\angle T(j\omega) = \angle L(j\omega) - \angle(L(j\omega) + 1) \simeq \angle L(j\omega) - \angle 1 \simeq \angle L(j\omega)$.

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 12

Para sistemas tipo 0 ou 1 (na verdade, qualquer tipo), o comportamento é independente desta característica.



Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 13



Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 14

- Vê-se que os diagramas de Bode de malha fechada apresentam bastante similaridade um com o outro.
- No caso do diagrama de módulo, assumem valores tipicamente próximos de 1 nas baixas frequências (se queremos erro estacionário pequeno, isto acaba sendo uma necessidade),
- Tem ganho próximo de zero nas altas frequências, e a maior diversidade ocorre justamente nas médias frequências, pois pode ou não haver picos de ganho (conhecidos como *picos de ressonância*).
- Além disso, importam também os valores da faixa de frequências médias e a inclinação do gráfico de módulo.
- No caso da fase, deve ser próxima de zero nas baixas frequências (o comportamento nas altas é bem variado, dependendo do número de pólos menos o número de zeros em malha aberta).

- **Nas médias frequências:** temos os valores ω_{180} e ω_c . De modo a ter margem de ganho positiva, devemos ter $|L(\omega_{180})| < 1$.
- Podemos definir a *Banda Passante* da função T como sendo a frequência ω_{BT} onde $|T(j\omega_{BT})| = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
- A *Banda Passante* da função S como sendo a frequência ω_B onde $|S(j\omega_B)| = 1/\sqrt{2} \simeq 0.707$.
- Tipicamente $\omega_B < \omega_c < \omega_{BT}$.
- Em controle clássico, quanto maior ω_{BT} melhor é a capacidade do sistema seguir um sinal de referência, pois a faixa de baixas frequências, onde $|T(j\omega)| \simeq 1$ e $\angle T(j\omega) \simeq 0$ seria bastante ampla.

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 16

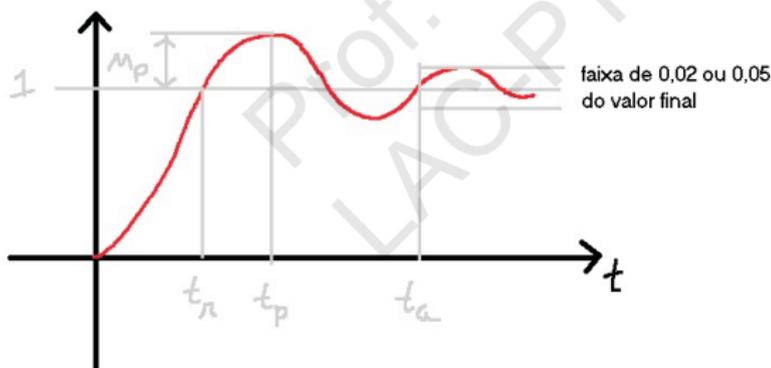
- Para controle H_∞ , olhamos para ω_B , pois para valores abaixo desta frequência $|S(j\omega)| \simeq 0$ (caso $|T(j\omega)| \simeq 1$), o que significa também bom segmento de referência, além de boa rejeição a distúrbios.
- O módulo de $T(j\omega)$ pode ou não ter um pico, conhecido como *pico de ressonância*. A frequência onde ocorre este pico é conhecida como *frequência de ressonância* ω_{ress} .
- O pico ocorre se $L(j\omega)$ tangencia um dos LG de módulo constante em MF (e a frequência onde isto ocorre é ω_{ress}).
- Pico de ressonância está ligada ao valor do máximo sobressinal da resposta ao degrau (polos dominantes complexos):

$$M_{\text{ress}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

sendo que $0 < \xi < 0.707$. Neste caso, $\omega_{\text{ress}} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$.

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 17

- Pode-se usar então as fórmulas dos parâmetros relacionados à resposta ao degrau que estão ligados ao desempenho do sistema. Tais parâmetros são: tempo de subida $t_r = (\pi - \beta)/\omega_d$, tempo de pico $t_p = \pi/\omega_d$, tempos de acomodação de 2%, dado por $t_a(2\%) = 4/\xi\omega_n$, tempo de acomodação de 5%, dado por $t_a(5\%) = 3/\xi\omega_n$ e porcentagem de sobressinal $M_p = 100 \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$. Pode-se mostrar que quanto maior for M_{RESS} , maior será a porcentagem de sobressinal.



M_p = porcentagem de sobressinal

t_r = tempo de subida

t_p = tempo de pico

t_a = tempo de acomodação

Desempenho a Partir do Gráfico de Nyquist 18

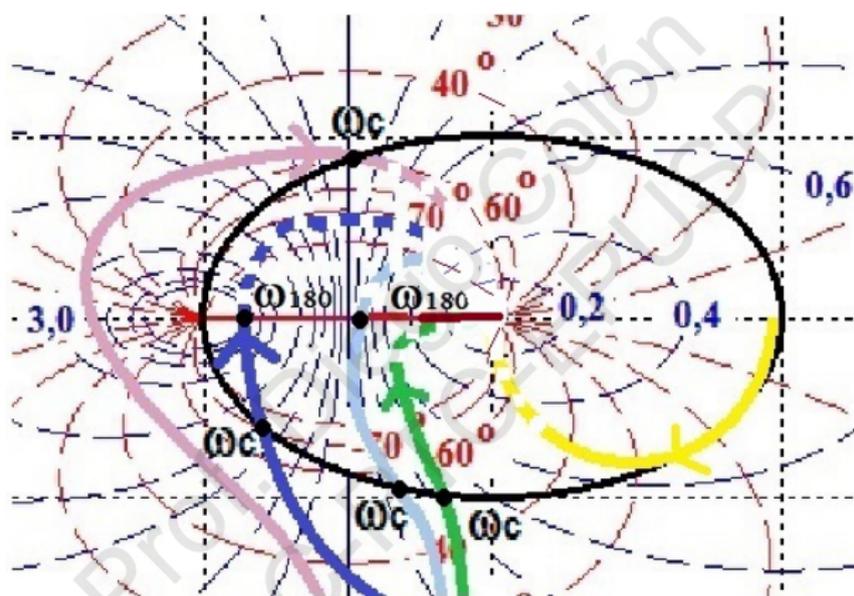


Figura: Comportamento em Médias Frequências

- Evidentemente, é possível avaliar a robustez olhando-se para as médias frequências, pois é nesta faixa que olhamos margem de ganho e margem de fase.
- Podemos então dizer que as médias frequências governam o desempenho em regime transitório e a robustez de estabilidade, enquanto as baixas frequências governam o regime estacionário, e as altas a rejeição ao ruído de medida.

- Os diagramas de Bode de $L(j\omega)$, conhecida como *função de transferência em malha aberta*, ou *loop transfer function*, podem ser usados como ferramentas de projeto de sistemas de controle em malha fechada.
- O formato adequado de $L(j\omega)$ dará um formato adequado para $T(j\omega)$ e conseqüentemente $S(j\omega)$. Esta técnica é conhecida como *Loop Shaping*, pois procura dar um formato adequado para $|L(j\omega)|$ e $\angle L(j\omega)$ de forma a garantir bom desempenho e robustez ao sistema.

Devemos então escolher um controlador $K(s)$ tal que proveja o sistema com as seguintes propriedades:

- **Baixas frequências:** $|L(j\omega)| = |G(j\omega)K(j\omega)|$ deve ser grande o suficiente de forma a ter $|T(j\omega)| = |L(j\omega)|/|1 + L(j\omega)|$ próximo de 1, o que garante também $\angle T(j\omega) \simeq 0$ nesta faixa. Teremos então
 - Baixo erro estacionário
 - Referências com espectro concentrado nesta faixa serão bem seguidas.
 - Distúrbios nesta faixa serão bem rejeitados.

Para se conseguir tal efeito, pode se fazer o ganho de $K(j\omega)$ grande ou introduzir integradores. Entretanto, cada integrador introduzindo em K significa um atraso adicional de fase de -90° , o que torna mais difícil estabilizar o sistema ou garantir uma boa robustez de estabilidade.

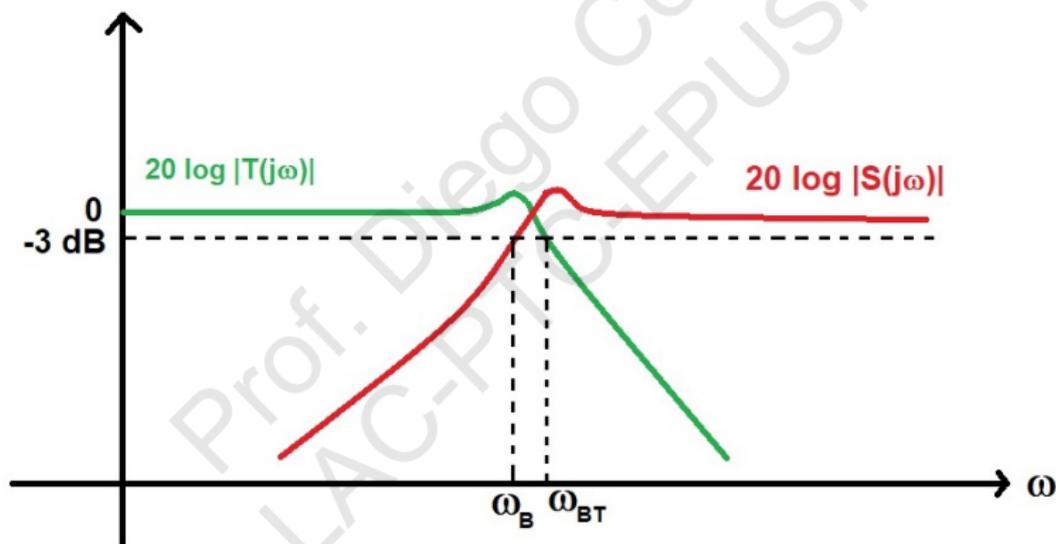
- **Médias frequências:** quanto maior for ω_{BT} , maior será a faixa de baixas frequências, o que garante melhor *fidelidade* no seguimento de referências e rejeição de distúrbios. Isto tipicamente se consegue com aumento de ganho e/ou redes de avanço de fase.
- A presença de picos de ressonância implicará respostas transitórias piores, pois vimos que a amplitude deste está positivamente relacionada com o máximo sobressinal.
- Da mesma forma, a robustez é menor quando há altos picos de ressonância, pois significa que os polos dominantes em MF estão próximos do eixo imaginário.
- Tipicamente, queremos que $M_{\text{ress}} < 1.25$, o que é equivalente a 2dB . Em projetos clássicos, procura-se garantir que $30^\circ < MF < 60^\circ$ e $MG > 6\text{dB}$ para se ter bom desempenho e robustez.

- **Altas frequências:** Em altas frequências, tem-se que tipicamente $|T(j\omega)|$ cai para zero. Entretanto, pode ser desejável que essa queda se dê rapidamente em relação à frequência, o que significa uma maior número de pólos de MF em relação ao número de zeros.
- Isto é desejável para que haja boa rejeição de ruído de medida. Para conseguir isso, como $T(j\omega) \simeq L(j\omega)$ nesta faixa, quanto maior o saldo de pólos de $K(j\omega)$, maior é essa queda.
- Entretanto, quanto maior o número de pólos de $K(s)$ (contando-se aí os integradores), maior o atraso de fase nas altas frequências, o que dificulta a estabilização e/ou robustez de estabilidade do sistema. Tipicamente um bom compromisso é ter uma queda de -20 dB/década nas frequências médias.

- Não há controlador $K(s)$ perfeito! Deve-se achar um compromisso entre bom desempenho (em regime permanente e transitório) e robustez, além de boa capacidade de rejeitar distúrbios e ruídos de medida.
- Veremos ainda que há mais restrições que deveriam ser respeitadas, que normalmente não são levadas adequadamente em conta no projeto Loop Shaping clássico. A mais importante é a energia do sinal de controle $u(t)$ (essa é entretanto levada em conta no projeto H_∞).

Desempenho Usando Funções S e T 1

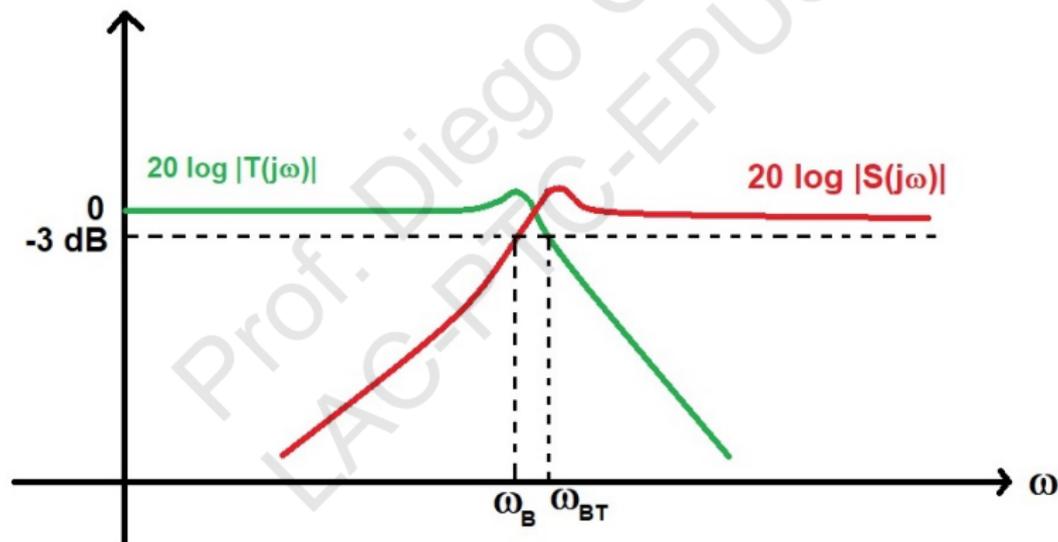
Já sabemos quais as propriedades que $|T|$ deve ter para que haja bom desempenho. De fato, para que haja bom seguimento de referência, ω_{BT} deve ser grande o suficiente.



Desempenho Usando Funções S e T 2

$$\|T\|_{\infty} = \max_{\omega} |T(j\omega)|$$

é a chamada *norma* H_{∞} da função de transferência T (no sentido da álgebra linear)



- Para que o sistema tenha uma boa robustez e desempenho, já vimos que tipicamente fazemos $\|T\|_{\infty} < 1.25$.
- Podemos definir $\|S\|_{\infty}$ da mesma maneira, que é o pico de ressonância da função S .
- Como:

$$\|S\| - \|T\| \leq \|S + T\| = 1$$

para qualquer frequência, tem-se que se $\|T\|_{\infty}$ é grande, então $\|S\|_{\infty}$ também deve ser.

É preferível se utilizar S no lugar de T . Podemos traduzir as propriedades desejáveis que o sistema deve ter para a função S da seguinte forma:

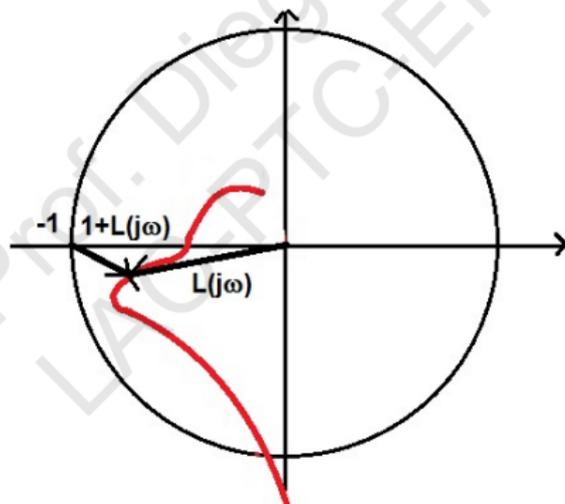
- **Baixas frequências:** $|S(j\omega)| \simeq 0$ para as baixas frequências a fim de ter bom seguimento de referência e rejeição de distúrbios;
- **Médias frequências:** ω_B deve ser grande o suficiente para se ter boa fidelidade, ou seja, seguimento de referência. $\|S\|_\infty$ deve ser menor 2 (6 dB) para se ter boa robustez e pequeno sobressinal. Para se ter um bom compromisso entre rejeição de ruído de medida e robustez, a queda nas médias deve ser em torno de -20 dB/década.
- **Altas frequências:** Quanto maior a queda nas altas, o efeito do ruído de medida é menor. Porém, tem-se que respeitar o compromisso nas frequências médias descrito acima.

Maximização de Robustez de Estabilidade 1

- A robustez de estabilidade pode ser medida por:

$$\|S\|_{\infty} = \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} = \frac{1}{\min_{\omega} |1 + L(j\omega)|}$$

de modo que quanto menor for esse número, maior é a robustez de estabilidade do sistema.



- Seria interessante projetar um controlador $K(s)$ tal que a robustez fosse máxima (problema de otimização)
- O espaço de busca nesta otimização contém os controladores que estabilizam internamente:

$$\min_{K(s)} \|S\|_{\infty}$$

onde $K(s) \in \mathcal{CE}_G$. Será que conseguimos encontrar algum algoritmo prático que forneça tal controlador ?

$|S(j\omega)|$ deverá assumir valores próximos de 1 em algumas faixas de frequência, pois senão o sistema em malha fechada não teria bom desempenho (não rejeitaria bem os ruídos de medida). Então podemos dizer que $\|S\|_\infty$ tende a ser maior que 1.

$|S(j\omega)|$ tem em geral picos de ressonância. Para casos de fase não-mínima ou instável, esses picos tendem a ser maiores ainda, ou seja, há limites inferiores para $\|S\|_\infty$. Não é incomum portanto que $\|S\|_\infty > 1$.

- Se assumirmos que conseguirmos achar uma resposta a esse problema de otimização, ele somente seria um controlador o mais robusto possível, mas não atenderia nenhuma especificação de desempenho.
- O erro teórico é $E_t = -SR + SG_dD - TN$, ou seja, a função sensibilidade S relaciona o erro com referência e erro com distúrbio.
- $|S(j\omega)| < \epsilon_1$ abaixo de uma certa frequência ω_a , onde $\epsilon_1 > 0$ é bem pequeno, para se ter atenuação de distúrbios bem como pequeno erro estacionário.
- Acima de uma frequência $\omega_b > \omega_a$, deseja-se que $|S(j\omega)| \rightarrow 1$ de modo a ter $|T(j\omega)| < \epsilon_2$, com $\epsilon_2 > 0$ bem pequeno, de modo a atenuar o ruído de medição.

- A estratégia adotada em controle H_∞ consiste em impôr um limite superior para $|S(j\omega)|$ em cada frequência, da forma:

$$|S(j\omega)| < 1/|W_p(j\omega)|, \quad (1)$$

onde $W_p(j\omega)$ é estável e tem uma característica passa-baixas (ao se inverter essa função, torna-se um passa-altas).

- Esta função $W_p(j\omega)$ é conhecida como *função peso de desempenho*.
- Se passarmos multiplicando a função peso em (1), teremos:

$$|S(j\omega)||W_p(j\omega)| = |S(j\omega)W_p(j\omega)| < 1 \quad (2)$$

- A condição (2) seria automaticamente atendida se $\|SW_p\|_\infty < 1$.
- Será então que não seria mais razoável buscar solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s)} \|SW_p\|_\infty \quad (3)$$

onde $K(s) \in \mathcal{CE}_G$?

- Se o algoritmo retornasse um controlador $K(s)$ tal que $\|SW_p\|_\infty < 1$, ou próximo disso, estaríamos satisfeitos, pois assim as especificações estariam garantidas.

- Este sistema não teria mais robustez de estabilidade máxima, porque passamos a ponderar os valores de $|S(j\omega)|$.
- Escolhas adequadas de $W_p(j\omega)$ podem fazer $\|S\|_\infty$ pequeno o suficiente para se ter boa robustez de estabilidade.
- Achar um controlador $K^*(s)$ que resolva o problema de otimização em (3) é uma tarefa computacionalmente muito complicada.
- Entretanto, uma *solução subótima*, na grande maioria dos casos, é mais que suficiente para os nossos objetivos.
- Se γ_{\min} é o mínimo atingido pela função $\|SW_p\|_\infty$, para qualquer valor $\gamma > \gamma_{\min}$ temos uma solução subótima.

- Pode-se mostrar, em uma solução subótima, que:

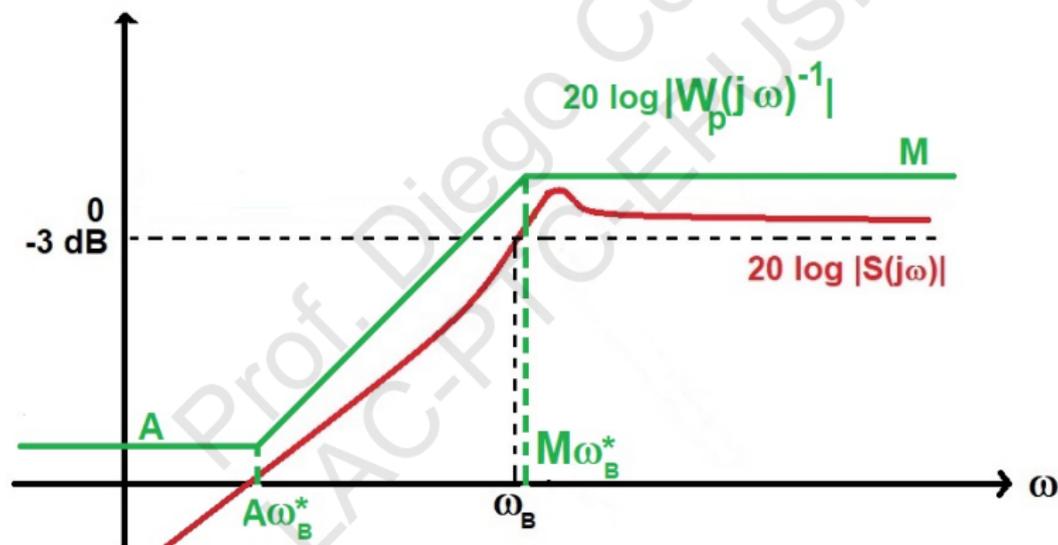
$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_p(j\omega)|}$$

de modo que se acharmos um $K(s)$ tal que $\gamma \simeq 1$, as especificações estariam parcialmente atendidas.

- Precisamos de um algoritmo que forneça uma solução subótima para o problema, e não necessariamente a solução ótima.
- Existe um algoritmo, a ser apresentado mais adiante, que fornece sucessivas soluções subótimas que vão aproximando de γ_{\min} e que teoricamente convergiria para ele.

Funções Peso de Desempenho Típicas 1

Para que as especificações de desempenho sejam atingidas no projeto ótimo H_∞ , é necessário que, ao final, $|S(j\omega)|$ esteja abaixo de $|W_p^{-1}(j\omega)|$, como está representado em:



- Isto é equivalente a dizer que foi achado um controlador $K^*(s)$ tal que $\|W_p S^*\|_\infty < 1$.
- A função peso acima é chamada de primeira ordem, pois possui apenas um pólo e um zero. Note que na figura está representada a inversa (na verdade, as suas assíntotas).
- Esta função tem a expressão matemática dada por:

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b^*}{s + A\omega_B^*}$$

- Para baixas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é aproximadamente A . Portanto, quando menor fizermos este parâmetro, menor queremos $|S(j0)|$, e portanto, menor o erro estacionário.
- Para altas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é aproximadamente M . Quanto menor fizermos este valor, menor queremos $\|S\|_\infty$, o implica em sistema menos oscilatório (e maior robustez de estabilidade). Porém, valores pequenos de $\|S\|_\infty$ (próximos ou abaixo de 1) podem não ser viáveis por restrições de desempenho (sistemas de fase não-mínima ou instáveis).
- Para médias frequências, o valor da banda-passante de S (ou seja, ω_B) vai tender a estar entre $A\omega_B^*$ e $M\omega_B^*$ se as especificações forem atendidas, de modo que quanto maior ω_B^* , maior tende a ser ω_B . Então, quanto maior a fidelidade que queremos maior fazemos ω_B^* .

- Podemos levar em conta no projeto o esforço de controle.
- O sinal de controle no sistema em malha fechada é dado por $U = KS(R - G_d D - N)$
- Se queremos que o esforço de controle seja pequeno devemos também ponderar a função de transferência $K(s)S(s)$.
- Adota-se a mesma técnica da função peso de modo que:

$$|K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{1}{|W_u(j\omega)|}$$

o que é equivalente a $\|KSW_u\|_\infty < 1$.

- Se queremos que o sinal de controle tenha pouca energia de controle nas altas frequências, fazemos com que $|W_u(j\omega)|$ seja alto nestas frequências, e vice-versa.
- Deste modo, a restrição $\|W_uKS\|_\infty < 1$ deve ser juntada ao problema de otimização original.
- Mostra-se que podemos incluir esta restrição no funcional a ser minimizado da seguinte forma: Seja a matriz de funções de transferência:

$$N(j\omega) = \begin{bmatrix} W_pS \\ W_uKS \end{bmatrix}, \quad (4)$$

- Para matrizes deste tipo, tem-se que:

$$\|N\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)|^2}, \quad (5)$$

- Se garantirmos que $\|N\|_{\infty} < 1$, teremos as especificações satisfeitas, bem como limitação do esforço de controle.
- Como estamos buscando soluções subótimas, tal que $\|N\|_{\infty} < \gamma$, e quanto mais próximo γ for do valor um, melhor.
- Neste caso, teremos:

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_b(\omega)| \quad , \quad |KS(j\omega)| < \gamma/|W_u(\omega)|$$

Há algoritmos que buscam, o sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. Eventualmente, após várias iterações, γ pode ficar próximo de um, ou até menor (quem sabe até chegue próximo do ótimo), o que também satisfaz as especificações. Se, por outro lado, o melhor valor de γ a que se chegar for muito acima de um, há algum problema com as especificações, pois não podem ser atendidas num tempo razoável. O algoritmo de Doyle, busca encontrar um controlador na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas *equações algébricas de Riccati* (ARE), que será estudado com mais detalhes mais adiante. Entretanto, há também a abordagem por LMI que é bastante popular.