MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 6 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X, com $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2 < \infty$. Então

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1} \xrightarrow{qc} \sigma^2.$$

Solução

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X, com $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$. Então

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1} \xrightarrow{qc} \sigma^2.$$

Note que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2)$.

Por outro lado, pela Lei forte dos grandes números,

$$\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{n-1}\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc} 1.E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2 \to^{qc} 1.\mu^2 = \mu^2$$

pois x^2 é uma função contínua de x.

Recordemos P.2 - Se $X_n \to^{qc} X$ e $Y_n \to^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \to^{qc} X \pm Y.$$

Portanto

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2) \to^{qc} (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2.$$

Em termos estatísticos estamos provando que S_n^2 é um estimador consistente para σ^2, pois a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parâmetro λ. Prove que a sequência $(X_n^2)_{n\geq 1}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

Solução

Observe que

$$E[X_n^2] = Var(X_n) + E[X_n]^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} < \infty$$

é integravel e satisfaz a Lei forte dos grandes números.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $N(0,1)$. Mostre que $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}$ converge quase certamente.

Solução

As variáveis X_i^2 são independentes e identicamente distribuidas com distrbuição χ_1^2. São integráveis e tem média igual a 1

Pela LFGN de Kolmogorov, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \xrightarrow{qc} \frac{1}{2}$, isto é, existe um subconjunto N^c de Ω,

$$N^c = \{w \in \Omega : \lim \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2(w)}{n} \xrightarrow{qc} 1\}$$

tal que $P(N^c) = 1$.

Com argumento semelhante, utilizando a LFGN de Kolmogorov, $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}{n} \xrightarrow{qc}$ 2 pois $(X_i - 1)^2$ são iáveis com médias iguais a $E[(X_i - 1)^2] = Var(X_i - 1) + E[X_i]^2 = 1 + 1 = 2$.

Portanto $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-1)^2}{n} \xrightarrow{qc} 2$, isto é, existe um subconjunto M^c de Ω,

$$M^c = \{w \in \Omega : \lim \frac{\sum_{i=1}^n (X_i(w) - 1)^2}{n} \to^{qc} 2\}$$

tal que $P(M^c) = 1$.

Como em $N^c \cap M^c)$ vale os dois resultados e $P(N^c \cap M^c) = 1$ temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2} \to^{qc} \frac{1}{2}.$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_n \sim Exp(2^{\frac{n}{2}})$. Mostre que vale a Lei Forte dos Grandes Números de Kolmogorov

Soluções Observe que as variáveis são independentes mas não identicamente

distribuidas e devemos aplicar a primeira lei forte de Kolmogorov: Nestas condições, se $\sum_{i=1}^{n} \frac{Var(X_i)}{n^2} < \infty$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} E[X_i]}{n} \xrightarrow{qc} 0.$$

Como $X_n \sim Exp(2^{\frac{n}{2}})$, $E[X_n] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ e $Var(X_n) = \frac{1}{2^n}$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Var(X_i)}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n n^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Observe tam´bém que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} E[X_i]}{n} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}}{n} = \frac{1 - \frac{1}{2}^n}{n} \to 0$$

quando $n \to \infty$,

Portanto

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{qc} 0.$$