MAT0234 Medida e Integração

Prof. Jorge Adrian Beloqui

Integração

1 Integração

Denotaremos por $M(X, \mathcal{A})$ o conjunto das funções mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}$ e $M^+(X, \mathcal{A})$ o das funções mensuráveis e positivas (não negativas).

Definição 1.1. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se sua imagem for finita. Ou seja, se $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$ onde $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}$ são os diferentes valores de φ e $E_j = \varphi^{-1}(\alpha_j)$, com E_j mensuráveis. Note que $\varphi \neq +-\infty$.

Exemplo.

1. As funções degrau. Como na soma inferior e soma superior de Riemann.

2. A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Ela pode ser representada como $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$.

Uma função simples φ admite várias representações. A que demos em sua definição chama-se *representação padrão*, com os E_j disjuntos 2 a 2..

Exemplo. A função simples dada por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

tem como representação padrão $\varphi = \chi_{[0,1)} + 3\chi_{[1,2)} + 2\chi_{[2,3]}$. Ela também pode ser representada por $\varphi = \chi_{[0,2)} + 2\chi_{[1,3]}$.

Começamos agora com a definição de Integral

Definição 1.2. Seja $\varphi \in M^+$ simples, com representação padrão $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}$. Definimos sua integral como:

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \mu(E_j)$$

Usaremos a convenção $0 \cdot \infty = 0$.

Exercício. Mostre que a definição independe da representação de φ.
A Integral da Função de Dirichlet é 0. Com efeito, se $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ então $\int f(x) \, d\mu = 1.\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Observe que esta definição coincide com a definição de Integral para as funções degrau utilizadas no cálculo da Integral de Riemann. Vejamos algumas das propriedades da integral das funções simples.

Lema 1. *Sejam $\varphi, \psi \in M^+$ simples:*

1. *Se $c \geq 0$ então $\int c \, \varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$*

2. $\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$

3. A função $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\lambda(E) = \int_E \varphi\, d\mu = \int \varphi\, \chi_E\, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração. Se $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \chi_{E_j}$, então $c\, \varphi = \sum_{j=1}^{n} c\, \alpha_j\, \chi_{E_j}$, logo:

$$\int c\, \varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c\, \alpha_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) = c \int \varphi\, d\mu$$

O que prova o primeiro item.
O segundo item fica como exercício.
Para o terceiro item: Observe que $\varphi\ \chi_E = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E \cap E_j}$, logo, $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E \cap E_j)$. Como μ_j definida por $\mu_j(E) = \mu(E \cap E_j)$ é uma medida, então λ é combinação linear de μ_j e, portanto, é uma medida (pode não ser finita!). □

Agora, podemos definir a integral de uma função $f \in M^+$ qualquer:

Definição 1.3. Seja $f \in M^+$ com $f : X \to \overline{R}_+$, definimos:

$$\int f\, d\mu = \sup \int \varphi\, d\mu$$

Onde o supremo é tomado sobre as funções φ que são simples e que tais que $\varphi \le f$. Se $E \in \mathcal{A}$, definimos:

$$\int_E f\, d\mu = \int f\, \chi_E\, d\mu$$

Esta definição é natural considerando o espaço de medida $(E, \mathcal{A} \cap E,\ \mu_E)$ onde $\mu_E(F) = \mu(E \cap F)$.
Também $\int_E f\ d\mu = sup_{\{\varphi\ simples; \varphi\ \le\ f,\ em\ E\}} \int_E \varphi\ d\mu$. Mas $\int_E \varphi\ d\mu = \int_X \varphi\ \chi_E\ d\mu$. Daí que $\int_E f\ d\mu = sup_{\{\varphi\ simples; \varphi\ \le\ f\}} \int_X \varphi\ \chi_E\ d\mu = \int_X f\ \chi_E\ d\mu$.

Note que:
1. diferentemente da Integral de Riemann, a definição "aparentemente"não leva em conta o que acontece com as funções simples ψ com $\psi \ \ge\ f$;
2. a integral de $f \in M^+$ existe sempre, finita ou infinita.
3. As funções degrau estão entre as funções simples. No caso de uma função g contínua em [a,b] por exemplo, temos que a Integral de Riemann será igual à Integral de Lebesgue.
Nota Histórica: Lebesgue e Kolmogorov definem a Integral de modo diferente. Eles pegam a sequência não decrescente de funções φ_n da lista de Funções Mensuráveis, definem a Integral de φ_n como a das funções simples e passam ao limite. Lembramos que essas funções podem tomar enumeráveis valores, de modo diverso das funções simples aqui mencionadas. Depois mostram que o limite é independente da sequência φ_n.

Do modo em que definimos a integral, para calcular $\int f\ d\mu$ deveríamos levar em conta TODAS as funções simples $\varphi \leq f$. Isto pode ser trabalhoso! Portanto, mostraremos a aditividade da integral depois do Teorema da Convergência Monótona.

Lema 2. *Sejam $f, g \in M^+$,*

1. *Se $f \leq g$ então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$*
2. *Se $E, F \in \mathcal{A}$ com $E \subset F$, então $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$*

Demonstração. Defina $\mathcal{C}(f) = \{\varphi \mid \varphi$ é simples e $\varphi \leq f\}$ e $\mathcal{C}(g) = \{\psi \mid \psi$ é simples e $\psi \leq g\}$. Se $\varphi \leq f$, então $\varphi \leq g$, ou seja $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{C}(g)$ porque $f \leq g$, logo:
Para o segundo item: Como $f\ \chi_E \leq f\ \chi_F$ segue a afirmação a partir do primeiro ítem.

□

Notação:
1. quando $(X, \mathcal{A}, \mu)$ forem claros, omitiremos $d\mu$ na integral
2. Escreveremos $\int f\ d\mu = \int_X f\ d\mu$ omitindo o conjunto onde integramos
3. Como $\int_E f\ d\mu = \int f\ \chi_E\ d\mu$, geralmente também omitiremos o conjunto onde integramos.

Proposição 3 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *(versão mais simples) Seja $f \in M^+$ e $c > 0$, então:*

$$\int f d\mu \geq c\ \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq c\})$$

Demonstração. Defina $A_c = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$, então A_c é mensurável. Seja φ a função simples dada por $\varphi = c\ \chi_{A_c}$, então $\int \varphi\ d\mu = c\ \mu(A_c)$, do segundo item da proposição anterior $\int f\ d\mu \geq \int f\ \chi_{A_c}\ d\mu = \int_{A_c} f\ d\mu$. Por construção $\int f\ \chi_{A_c}\ d\mu \geq \int \varphi\ d\mu = c\ \mu(A_c)$ ou seja:

$$\int f\ d\mu \geq c\ \mu(A_c) = c\ \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq c\})$$

□

Esta desigualdade é muito útil!

Proposição 4. *Seja $f \in M^+$. Então $\int f\ d\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ q.t.p.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Defina $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Note que $A_n \subseteq A_{n+1}$. Pela desigualdade de Chebyshev: $0 = \int f\ d\mu \geq \frac{1}{n}\ \mu(A_n) \geq 0$, ou seja, $\mu(A_n) = 0$ para todo n. Como $A_0 = \{x \in X \mid f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, temos que $\mu(A_0) = \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = lim\ \mu(A_n) = 0$.
$\Leftarrow$) Seja $\mathcal{C}(f) = \{\varphi \mid \varphi$ é simples e $\varphi \leq f;\ \varphi \in M^+\}$ e $\varphi \in \mathcal{C}(f)$. Logo se $\varphi \leq f$ então $\varphi = 0$ qtp. Assim $\int \varphi\ d\mu = 0$. Logo $\int \varphi\ d\mu = 0$ para toda função simples φ em $\mathcal{C}(f)$. Assim $\int f\ d\mu = sup_{\mathcal{C}(f)\int \varphi\ d\mu} = 0$. □

Definição 1.4. Observe que podemos ter $\int f\ d\mu = +\infty$. Dizemos que uma função f é *integrável* se $\int f\ d\mu < +\infty$. Neste caso escrevemos $f \in L^+(X, \mathcal{A})$.

Consequência: Se $f \leq g; f,\ g \in M^+$ e g integrável, então f é integrável.

Proposição 5. *Se $f \in M^+$ é integrável (ou seja, se $\int f\, d\mu < +\infty$), então $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$.*

Demonstração. Seja $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$. Por Chebyshev, $+\infty > \int f d\mu \geq n\mu(A_n)$, ou seja: $\mu(A_n) \leq \frac{\int f d\mu}{n}$ e assim $\mu(A_n)$ *é finita e* $\to 0$. Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ e $\mu(A_n) \to 0$ temos: $\mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = lim\ \mu(A_n) = 0$. □

Proposição 6. *Se $f \in M^+$ integrável (ou seja, se $\int f\, d\mu < +\infty$), então dado $\epsilon > 0$ existe $c > 0 \mid \mu(\{x;\ f(x) > c\}) \leq \epsilon$.*

Demonstração. Seja $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$. Por Chebyshev, $+\infty > \int f d\mu \geq n\ \mu(A_n)$, ou seja: $\mu(A_n) \leq \frac{\int f d\mu}{n}$. Assim, basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{\int f d\mu}{n}$. □

Agora, o que acontece com uma função que tem valores positivos e negativos?
Escrevemos $f = f^+ - f^-$, com $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$, então $f^+, f^- \in M^+$ e definimos:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Observe que para a expressão ter sentido, não podemos ter $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ dando $+\infty$.

Definição 1.5. Dizemos que f é *semi-integrável* se uma das integrais $\int f^+\, d\mu$, $\int f^-\, d\mu$ for $+\infty$ e a outra for finita.

Definição 1.6. Se as duas forem finitas, então $\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$ pode ser definida sem problemas. Neste caso dizemos que f é integrável, e escrevemos $f \in L(X, \mathcal{A})$.

Teorema da Convergência Monôtona (B. Levi, Lebesgue):
Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : (X, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas, $E \in \boldsymbol{A}$.
Então $f_n \to f$, f mensurável; e $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$
Teo da Convergência Monótona (Levi,Lebesgue): Seja f_n seq de funções em M^+, não decrescente. Então $f_n \to f$ e $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$
Dem: Como f_n não decrescente então $f_n \to sup(f_n) = f$.Como as f_n mensuráveis, f resulta mensurável.
Logo $\int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$. Também $\int f_n\, d\mu \leq \int f_{n+1}\, d\mu$. Seja $\alpha = sup \int f_n\, d\mu$.
Quero ver que $\alpha = \int f\, d\mu$
Tomo $0 < c < 1$ e φ simples, $\varphi \leq f$. Consideramos $A_n = \{c\varphi \leq f_n\}$. A sequência $\{A_n\}$ é crescente, e $\cup_1^{+\infty} A_n = X$.
$\int_{A_n} c\varphi\, d\mu \leq \int_{A_n} f_n\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu \leq \alpha$. Vimos anteriormente que $\int \varphi\, d\mu$ é uma medida. Logo $\int_{A_n} \varphi\, d\mu \to \int_X \varphi\, d\mu$.
Assim, $\int_X c\, \varphi\, d\mu \leq \alpha$.

Tomando o sup sobre as $\varphi \leq f$ temos que
$c\, sup(\int \varphi\, d\mu) = c \int f\, d\mu \leq \alpha \leq \int f\, d\mu$.
Isto vale para todo c entre 0 e 1.
Passando ao limite quando c tende para 1, $\alpha = \int f\, d\mu$ ou
$\int f_n\, d\mu \rightarrow \int f\, d\mu$.□
Observação: para calcular o valor da Integral de uma função mensurável a partir da definição, deveríamos examinar todas as funções simples $\varphi \leq f$. Mas o Teorema da Convergência Monôtona nos permite examinar apenas uma sequência não decrescente de funções simples, como as definidas na lista de Funções Mensuráveis.

Corolário Do Teorema: Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e
$f_n : (X, \boldsymbol{A}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas com $f = \sum_1^\infty f_n$. Então f mensurável e $\int f d\mu = \sum_1^\infty \int f_n d\mu$
Dem: sejam $g_n(x) = \sum_{j=1}^n f_n(x)$. Então g_n é uma sequencia monótona não decrescente de funções em M+. Pelo Teorema da Convergencia Monótona,
$\int g_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ ou $\sum_1^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_1^\infty f_n d\mu$.
Para mostrar a linearidade da Integral, também usamos este Teorema.

Proposição 7. *Mostre que se f, g* $\in M^+$ *então*
$\int f + g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$. *Com efeito, tomamos* φ_n; ψ_n *sequências de funções simples não decrescentes que convergem para f e g respectivamente.*
Logo $\varphi_n + \psi_n$ *converge monotonamente para* $f + g$.
Assim, pelo Teorema da Conv. Monótona, $\int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \rightarrow \int (f + g)\, d\mu$.
Também $\int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \int \varphi_n\, d\mu + \int \psi_n\, d\mu \rightarrow \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.
Logo $\int f + g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ □.

Proposição 8. *Mostre que se f* $\in M^+$ *e* $c \geq 0$ *então* $\int c\, f\, d\mu = c \int f\, d\mu$

Corolário do **Teorema da Convergência Monôtona**:
Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n \in L^+(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas, que converge para uma $f \in M^+$ **qtp**.
Então $\int f_n\, d\mu \rightarrow \int f\, d\mu$.

Lema de Fatou : sejam $\{f_n\}$ funções em M^+. Então
$\int(\liminf f_n)\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu$

Proposição 9. *Seja* $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f \in M^+$. *Então*
$\lambda\ (X, \boldsymbol{A}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ *dada por* $\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$ *é uma medida.*

Neste caso, λ chama-se uma **integral indefinida** de f.

Proposição 10. *Se f for Riemann Integrável no intervalo [a,b], então f é mensurável para a medida de Lebesgue* μ *e a Integral de Riemann* $\int_a^b f(x)\, dx$ *é igual à Integral de Lebesgue* $\int_{[a,b]} f\, d\mu$.