Forma canonica de Jordan

- Matrizes complexas

Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Então existe $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertível tal que

$P^{-1}AP = J$ (matriz na forma de Jordan de A) onde

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_p \end{pmatrix}$$ matriz diagonal em blocos

com cada bloco J_i também quadrado e da forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

λ_k é um autovalor de A cuja multiplicidade algébrica determina a soma do tamanho de todos os blocos de Jordan J_i associados a ele.

Seja $\phi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{l_k}$ polinômio característico de A.

- l_i é a multiplicidade algébrica do autovalor λ_i.
- A multiplicidade geométrica de $\lambda_i = \dim\left[\ker(A-\lambda_i I)\right]$
- Se $l_i = \dim\left[\ker(A-\lambda_i I)\right]$ temos que λ_i possui apenas um bloco de Jordan que é diagonal.
- Observe que cada bloco J_i é a soma de uma matriz diagonal e uma nilpotente.

Unicidade: A forma canônica de Jordan de A é única up to the order of the Jordan blocks.

- Matrizes Reais

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podemos obter sua forma de Jordan complexa. Se todos os seus autovalores são reais, sua forma de Jordan também será real, bem como a matriz invertível P.

Se A possui autovalores complexos, existe uma mudança de coordenadas que transforma os blocos de Jordan complexos em blocos de Jordan reais da seguinte forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} C_i & I_{2\times 2} & & 0 \\ & C_i & I_{2\times 2} & \\ & & C_i & \ddots \\ & & & \ddots & I_{2\times 2} \\ 0 & & & & C_i \end{pmatrix} \qquad I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$

$\lambda_i = a_i + ib_i \in \mathbb{C}$.

Exemplo:

1) $J = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ & & a & -b \\ & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$\lambda = a + ib$ autovalor
$b \neq 0$

multiplicidade algébrica de $\lambda = 2$
" geométrica $= 1$

Lembre-se que aqui se usa de $\bar{\lambda} = a - ib$ também é autovalor.
Os blocos aqui usam esse fato: $\lambda = a+ib$ é autovalor $\leftrightarrow$ $\bar{\lambda} = a - bi$
já que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (real).

Este caso está associado a matriz complexa de Jordan

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Note que aqui temos dois blocos de Jordan complexos.

2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = a+ib$

OBS: Note que qualitativamente podemos trabalhar com $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$\lambda = a+ib = a - i(-b)$$
$$\rightsquigarrow \bar{\lambda} = a + i(-b).$$

Referência: Wikipédia (Jordan normal form).

- Aplicação: Comportamento assintótico de sistemas lineares

$$(*) \quad \dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ constante.}$$

Teorema. All the solutions of $(*)$ approach zero as t approaches infinite if all the zeros of $\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ lie in the half-plane

$$\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0 \}.$$

If the zeros of $\phi(\lambda)$ lie in $\{ z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq 0 \}$ then all the solutions are bounded for positive t as the algebraic and geometric multiplicity of eigenvalues λ_i with $Re(\lambda_i) = 0$ are iqual.