Lista de Exercícios para a P1

① Exercício da pág. 15 das notas de aula (mas já fazendo uso da notação de índices abstratos).

② Exercício ④ da pág. 28 das notas de aula.

③ Exercício ⑥ da pág. 28 das notas de aula.

④ Exercícios ⑦ e ⑧ da pág. 29 das notas de aula.

⑤ Sejam p, q, r três eventos no espaço-tempo de Minkowski. Para um observador inercial $\mathcal{O}$ passando pelo evento p, os eventos p e q são descritos como simultâneos e separados por uma distância espacial D. Já para um outro observador inercial $\widetilde{\mathcal{O}}$, q e r ocorrem na mesma posição (espacial), com r ocorrendo um intervalo de tempo T depois de q. Além disso, a informação luminosa da ocorrência de p atinge o evento r diretamente.

(a) Calcule todos os intervalos invariantes entre p, q e r;

(b) Mostre que a velocidade entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ vale (em módulo) no mínimo

$$V_{min} = \frac{|c^2T^2 - D^2|}{c^2T^2 + D^2}\, c;$$

(c) Mostre que a *informação* da ocorrência do evento r chega ao observador $\mathcal{O}$ no mínimo um intervalo de tempo

$$(\Delta t)_{min} = \frac{c^2T^2 + D^2}{cD}$$

depois da ocorrência de p.

(Sugestão: Primeiro, resolva este exercício num espaço-tempo bidimensional – caso em que as expressões acima não fornecem apenas os valores mínimos mas sim os únicos valores possíveis. Em seguida, analise o que acontece quando dimensões espaciais são acrescentadas ao problema.)

⑥ Em 2011, o experimento OPERA, localizado na Itália, anunciou a detecção de neutrinos "superluminais" produzidos no CERN, a cerca de 730 km de distância, que teriam chegado aos detectores do OPERA cerca de 60 ns *antes* do que a luz teria levado se percorresse o mesmo caminho (do CERN até o OPERA).

(a) Calcule aproximadamente o *intervalo invariante* entre os eventos de produção e detecção desses neutrinos ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s). Fique atento ao sinal do resultado e classifique o tipo de separação entre esses eventos ("produção" e "detecção");

(b) Para um observador se movendo em relação à Terra com uma certa velocidade $\vec{V}$, a produção e a detecção dos neutrinos foram eventos simultâneos (ou seja, para ele a velocidade dos neutrinos é infinita)! Qual o módulo dessa velocidade $\vec{V}$ e qual a distância entre a produção e a detecção segundo ele?

(c) Se considerarmos um observador com uma velocidade ainda maior que a do item anterior (e na mesma direção e sentido) como ele descreveria a relação entre produção e detecção dos neutrinos?

⑦ Considere o procedimento *incorreto* apresentado no início da pág. 38 das notas de aula, quando tentávamos relacionar os comprimentos de uma régua medidos por diferentes observadores. O equívoco daquele procedimento estava em se medir a distância espacial entre as extremidades da régua em instantes diferentes. No entanto, podemos consertar o procedimento se levarmos em conta o quanto as extremidades da régua se movem nesse intervalo de tempo que separa os eventos, de acordo com $\mathcal{O}$. Faça isso e reobtenha a relação correta dada pela Eq. (2.8).

⑧ Considere os observadores inerciais $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ padrões, caracterizados pelas tetradas $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ e $\{\widetilde{\mathbf{e}}^a_\mu\}$, respectivamente — relacionadas pelas Eqs. (2.4) das notas de aula. No evento p em que as linhas-de-mundo de $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ se cruzam, ambos observam um fóton que $\mathcal{O}$ descreve como tendo vindo da direção (espacial) que faz um ângulo θ com sua direção dada por $\mathbf{e}^a_1$. Sendo ℓ^a o 4-vetor que representa a direção de propagação desse fóton, pede-se:

(a) Escreva ℓ^a em termos da base tetrada que caracteriza $\mathcal{O}$ (não se esqueça que $g_{ab}\ell^a\ell^b = 0$);

(b) Calcule o ângulo $\widetilde{\theta}$ que o observador $\widetilde{\mathcal{O}}$ mede entre a direção (espacial) de onde esse fóton chegou e a direção dada por $\widetilde{\mathbf{e}}^a_1$; (O fato que $\theta \neq \widetilde{\theta}$ é chamado de *aberração estelar* e sobrevive mesmo em física newtoniana, quando se desprezam efeitos de ordem V^2/c^2. Verifique isso a partir de seu resultado.)

(c) Justificaremos, no próximo capítulo, que a frequência do fóton medida por um observador qualquer é proporcional à projeção de

ℓ^a na direção puramente temporal do observador: $f \propto g_{ab}\mathbf{e}_0^a \ell^b$ (e a constante de proporcionalidade independe de observador). Tomando isso como verdade, obtenha a relação entre as frequências f e $\widetilde{f}$ que os observadores $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ atribuem para esse fóton. (O fato que $f \neq \widetilde{f}$ é chamado de *efeito Doppler* e sobrevive mesmo em física newtoniana, quando se desprezam efeitos de ordem V^2/c^2. Verifique isso a partir de seu resultado.)

⑨ Considere a família de linhas-de-mundo dada, em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ arbitrário, por

$$x^a(t; \sigma, \lambda, \zeta) := t\left(\mathbf{e}_0^a + \sigma \mathbf{e}_1^a + \lambda \mathbf{e}_2^a + \zeta \mathbf{e}_3^a\right),$$

onde $\{\mathbf{e}_\mu^a\}_{\mu=0,\ldots,3}$ é uma base tetrada de $\mathbb{V}$ e t é o parâmetro ao longo de *cada* linha-de-mundo indexada por valores *fixos* de (σ, λ, ζ).

(a) Qual a restrição que se deve impor nos parâmetros σ, λ, ζ para que as linhas-de-mundo acima representem observadores físicos?

(b) Represente essa família de observadores num diagrama espaço-tempo e interprete o significado físico dos parâmetros σ, λ, ζ; (Pode representar num diagrama (1+1)-dimensional, mas certifique-se de que entende a situação também num diagrama (1+2)-dimensional e se esforce para entender a situação no espaço-tempo (1+3)-dimensional.)

(c) Reparametrize essas linhas-de-mundo de modo que o parâmetro sobre cada linha-de-mundo seja seu tempo-próprio τ;

(d) Calcule a 4-velocidade e a 4-aceleração de cada linha-de-mundo;

(e) Mostre que os eventos p pertencentes ao lugar geométrico Σ_τ determinado por $\tau =$ const. satisfazem $\mathcal{I}(o, p) =$ const. ≤ 0. Além disso, mostre que esse lugar geométrico é *localmente* ortogonal às 4-velocidades dos observadores dessa família (e, portanto, Σ_τ, embora *não* seja um subespaço de $\mathbb{M}$, pode ser considerada como a superfície espacial, ou de simultaneidade, *dessa* família). Represente Σ_τ no mesmo diagrama espaço-tempo do item (b);

(f) Considere, por simplicidade, as linhas-de-mundo indexadas por $(0, 0, 0)$ e $(\sigma, 0, 0)$, para um dado valor de σ. Calcule a separação $D(\tau, \sigma)$ entre essas linhas-de-mundo ao longo da superfície espacial Σ_τ. Além disso, mostre que a taxa com que essa separação muda, com o tempo-próprio τ, satisfaz a chamada *lei de Hubble* (ou seja, é proporcional a $D(\tau, \sigma)$ e, portanto, é arbitrariamente grande para linhas-de-mundo arbitrariamente afastadas);

(g) Considere a curva fechada dada pela interseção de Σ_τ com as linhas-de-mundo indexadas por $(\sigma \cos\theta, \sigma \sin\theta, 0)$, com σ *fixo* e $\theta \in [0, 2\pi)$. Calcule o perímetro $C(\tau, \sigma)$ dessa curva e relacione o resultado com o valor de $D(\tau, \sigma)$ encontrado no item anterior. O que se pode inferir a respeito da geometria de Σ_τ?

⑩ Dois irmãos gêmeos, A e B, se separam num certo instante, sendo que A parte numa viagem espacial com *aceleração própria constante* a, enquanto que B permanece inercial. Decorrido um intervalo de tempo T para B, ambos voltam a se encontrar.

(a) Para se certificar que você compreendeu a situação descrita acima, esboce as linhas-de-mundo de ambos os observadores num diagrama espaço-tempo; (Atenção: Note que A deve se afastar e depois voltar a se aproximar de B num único movimento uniformemente acelerado; não há mudança na aceleração própria de A entre a partida e a chegada.)

(b) Escolhendo uma base tetrada $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ (igual em todos os eventos) de modo que a linha-de-mundo de B seja dada por $x^a_B(t) = ct\,\mathbf{e}^a_0$ e a separação espacial entre A e B se dê na direção de $\mathbf{e}^a_1$, obtenha a linha-de-mundo de A, $x^a_A(t)$;

(c) Sendo V_0 a velocidade inicial de A em relação a B, encontre uma relação entre V_0, a e T;

(d) Qual o tempo de viagem decorrido para A? (Depois de obter uma expressão exata, analise os regimes $a \to \infty$ e $a \to 0$.)