Sistemas Térmicos

- Introdução
- Elementos puros
    - Representação
    - Variáveis básicas
- Condução
- Convexão
- Radiação

Sistemas Térmicos

Variáveis básicas

q → variável através (fluxo de calor)

$$[q] = \frac{kcal}{s}$$

- θ → variável entre (temperatura)

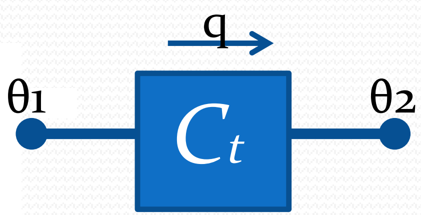
$$[\theta] = {}^{\circ}K$$

Elementos puros

Elementos puros:

a) armazenadores de energia (E)

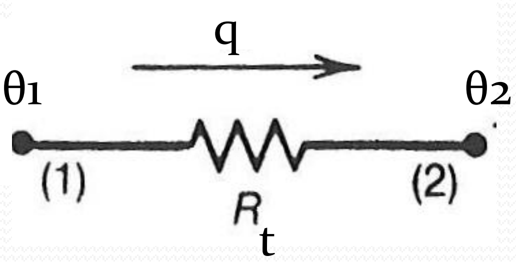
- Capacitância térmica



- Indutância térmica: não existe

b) dissipadores de Energia:

-Resistência térmica



A analogia a parâmetros concentrados é pobre pela inexistência da indutância e os fenômenos serem melhor representados por parâmetros distribuídos.

Introdução

- A representação em parâmetros concentrados pode ser feita com cuidado em caso onde se busca uma representação simplificada.

- Os fenômenos de transferência de calor são múltiplos:
  - Condução
  - Convecção
  - Radiação

- Alguns fenômenos são extremamente não-lineares

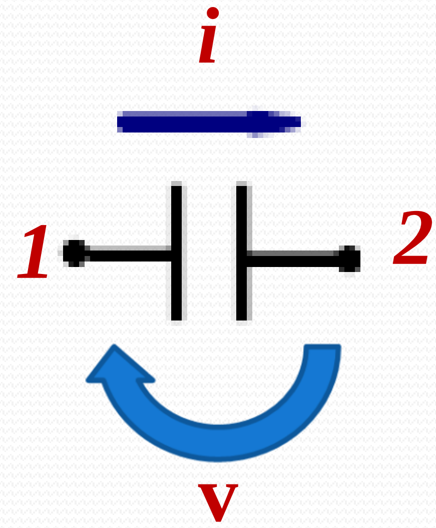
$$B_i = \frac{R_c}{R_k} = \frac{\text{Resistência à condução}}{\text{Resistência à convecção}} < 0{,}1$$

Aproximações boas quando o número de Biot é baixo:

Bons resultados com parâmetros concentrados quando o fenômeno predominante é a condução.

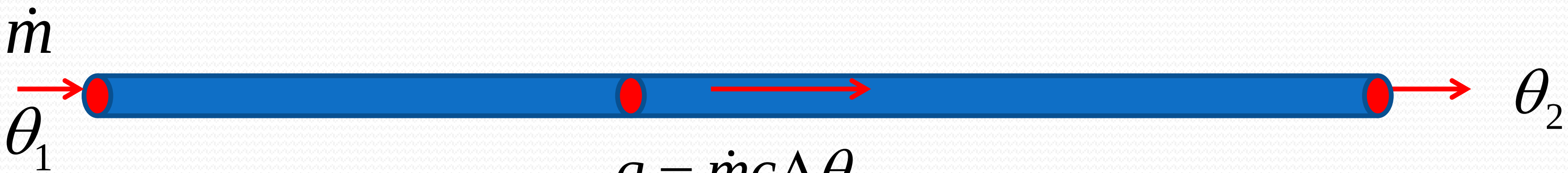
Capacitância Térmica

Na eletricidade:



$$i = C\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow q = C_t\frac{d\theta}{dt}$$

Obs: Fluxo de calor quando há fluxo de massa:



$$q = \underbrace{\dot{m}c}_{C_f}\Delta\theta$$

Capacitância Térmica

Capacidade do elemento guardar energia por meio da variação de temperatura quando ele recebe um fluxo de calor:

- Analogia: mecânica → $\vec{f} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$
- elétrica → $i_c = C\dfrac{dV_c}{dt}$
- fluidos → $Q = \dfrac{A}{\rho g}\dfrac{dp}{dt}$
- térmica → $q = C\dfrac{d\theta}{dt}$

onde $C = m \,.\, c_p$

calor específico

Através

Entre

Condução e convecção: podemos imaginar o calor como um fluido passando por uma tubulação ou uma corrente passando por um condutor.

Quando há fluxo de massa por um elemento: $q = m \cdot c_p \dfrac{d\theta}{dt} \cong \dot{m} \cdot c_p \cdot \Delta\theta$

Condução

Conservação da energia

*"A taxa líquida da transferência de calor por **condução** através da fronteira de um volume de controle unitário é igual à taxa de calor acumulado no volume unitário."*

Uma modelagem mais precisa é feita pela equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

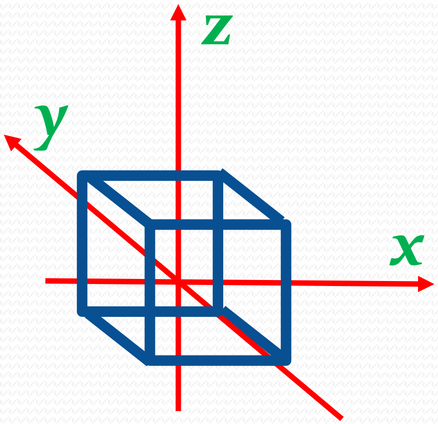
Fluxo de calor por um elemento de massa tridimensional.

$\alpha \rightarrow$ coeficiente de difusibilidade térmica :

$$\alpha=\frac{k}{\rho c_p}=\frac{condutividade}{densidade\cdot calor\ específico}$$

$x, y, z \rightarrow$ coordenadas cartesianas

$t \rightarrow$ tempo

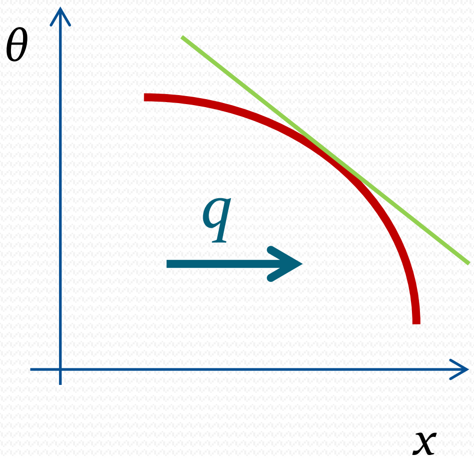


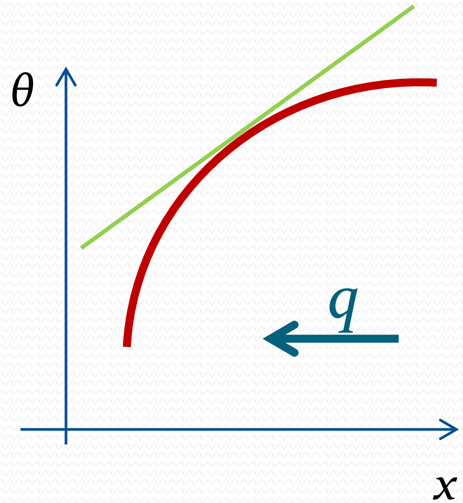
Condução

Hipótese: condução em uma única direção

Equação de Fourier:

$$q = -kA\frac{d\theta}{dx}$$





Hipótese: se a condutividade do material não depende da temperatura:

$$q = -\frac{kA}{\Delta x}\Delta\theta = -\frac{kA}{\Delta x}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{kA}{\Delta x}(\theta_1 - \theta_2) = K_1\Delta\theta = K_1\theta$$

Fluxo de calor por convecção e radiação

- Convecção

$$q = \underbrace{c_k A}_{K_k} \Delta\theta \qquad c_k \rightarrow \text{coeficiente transf. por convecção}$$

$$[c_k] = \frac{kcal}{m^2\, s\, °C}$$

$$q = K_k \Delta\theta$$

- Radiação: lei de Stephan-Boltzman

$$q = c_r\left(\theta_1^4 - \theta_2^4\right)$$

$$c_r = \sigma F_e F_A A$$

$$\sigma \rightarrow cte \text{ de Stephan - Boltzman}$$

$$F_e \rightarrow Emissividade \text{ efetiva}$$

$$F_A \rightarrow Fator \text{ de forma}$$

Resistência Térmica

- Por analogia:
  - com a eletricidade: $V_R = Ri \;\rightarrow R = \frac{V_R}{i} = \frac{entre}{através}$
  - com fluidos: $R \triangleq \frac{dH}{dQ} = \frac{entre}{através}$
  - Resistência térmica:
    - Condução → lei de Fourier: $q = \frac{kA}{\Delta x}(\theta_1 - \theta_2) = Kc\theta$
    - lei da convecção → $q = K_k\theta$

$$R_t \triangleq \frac{entre}{através} = \frac{d\theta}{dq} \cong \frac{\Delta\theta}{\Delta q} = \frac{1}{K} \quad \Rightarrow [R_t] = \frac{°K}{kcal/s}$$

Resistência térmica

coeficiente de transferência de calor convectiva

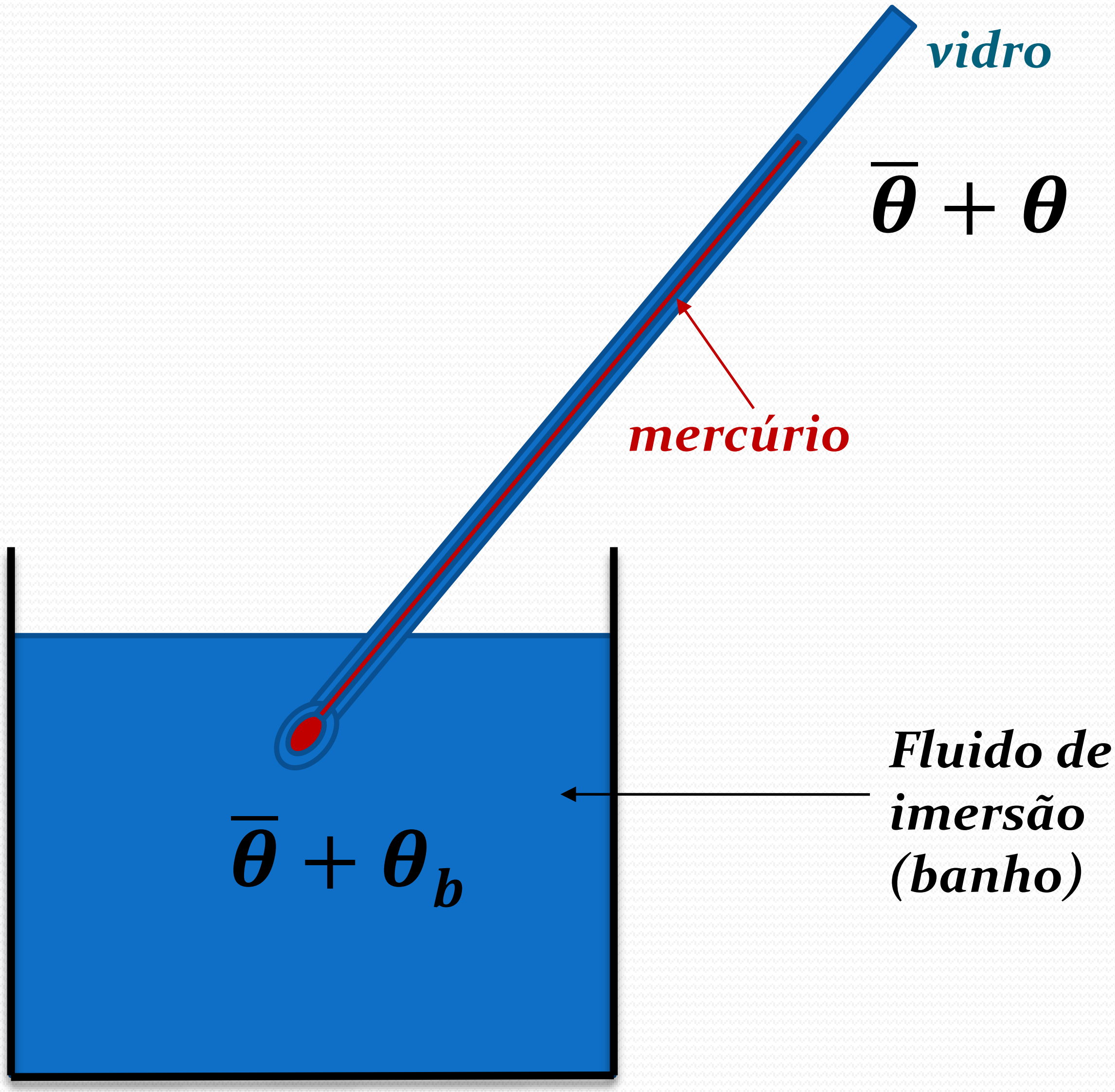
$$\left.\begin{aligned} B_i &= \frac{R_c}{R_k} =< 0{,}1 \\ R_c &= \frac{\Delta\theta}{\Delta q_c} = \frac{\Delta x}{kA} \\ R_k &= \frac{\Delta\theta}{\Delta q_k} = \frac{1}{c_k A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_i = \frac{\Delta x \cdot c_k}{k}$$

condutividade térmica

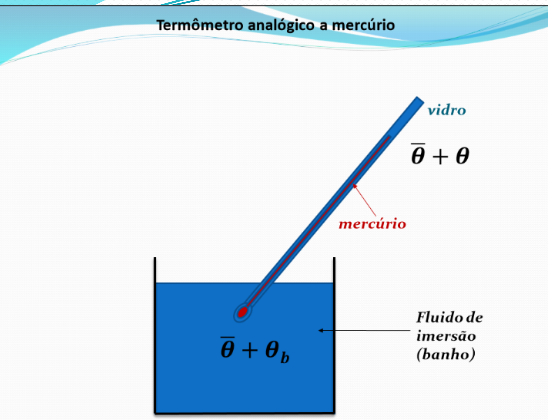
Exercícios:

- 1) Modele a resposta de um termômetro analógico a mercúrio, utilizado para medir a variação de temperatura de banho num recipiente. Inicialmente o termômetro e o banho estão na temperatura de equilíbrio $\bar{\theta}$, que é alterada de θ_b . Admita conhecidas as resistências térmicas e capacitâncias dos elementos.
- a) admita inicialmente que o vidro do termômetro tem influencia desprezível e determine o modelo dinâmico de $\theta(t)$;
- b) elimine a hipótese simplificadora do item a) e refaça a modelagem.
- Em ambos os casos, apresente a modelagem por meio do balanço de energia e por meio da analogia com sistemas elétricos.

Termômetro analógico a mercúrio



Termômetro analógico a mercúrio



Balanço de energia: o calor sai do banho vence a resistêcnia do mercúrio, onde é acumulado.
Acúmulo de calor no mercúrio:

$$q = C\frac{d\theta}{dt} \qquad (1)$$

Da resistência térmica do mercúrio:

$$q = \frac{\Delta\theta}{R} \qquad (2)$$

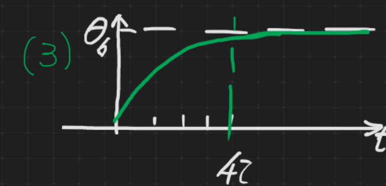
$$(2) \rightarrow (1): \quad C\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\theta_b - \theta)}{R}$$

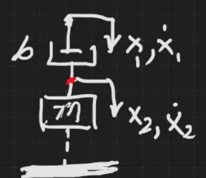
$$\therefore RC\,\dot{\theta} + \theta = \theta_b \Rightarrow$$ [RC]= s --> cte de tempo do termômetro → τ

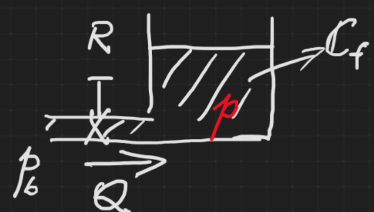
temperatura

oK

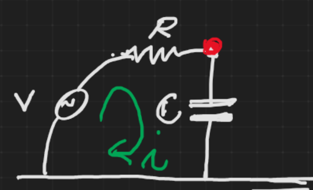
$$\boxed{\therefore \tau\dot{\theta} + \theta = \theta_b}$$



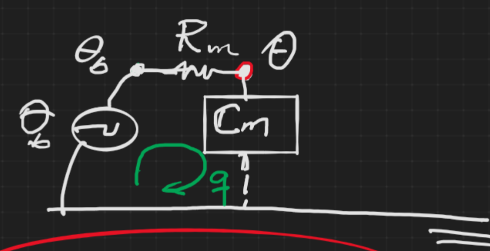




Análogos:



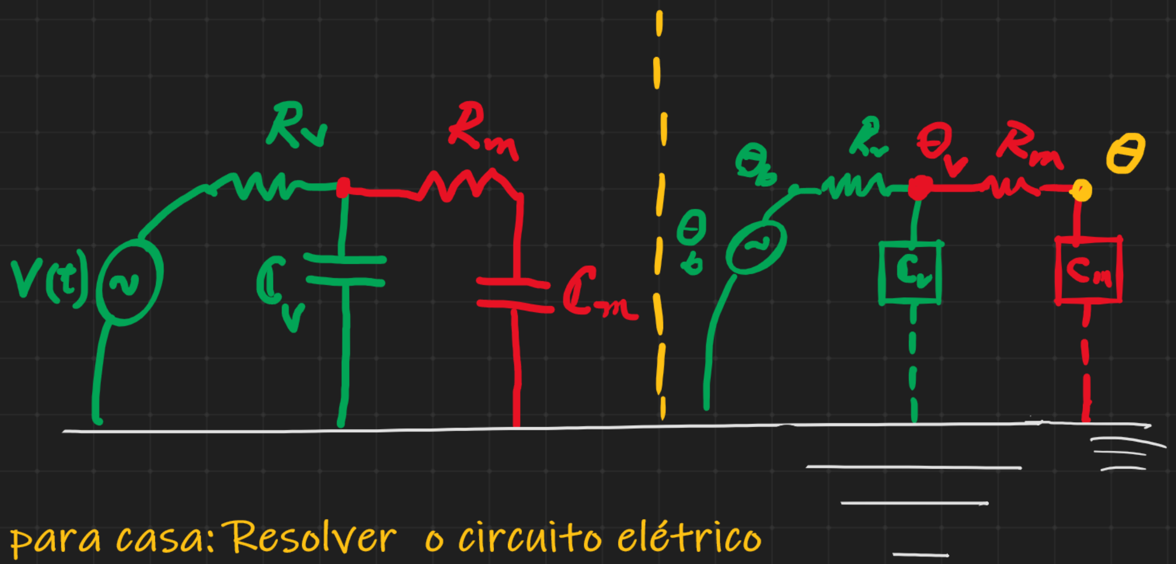
elétrico



Ex 2 casa: solução

Termômetro analógico a mercúrio

ncluindo o vidro :



Exercício 3 para casa: Resolver o circuito elétrico e por analogia obter as equações da dinâmica do termômetro

Modelos matemáticos :

Equações básicas do balanço de energia→ *1ª Lei da Termodinâmica*

$$\begin{pmatrix} \textit{taxa} \text{ de Energia} \\ \text{acumulada no} \\ \text{sistema} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{fluxo} \text{ de calor} \\ \text{que entra} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \textit{fluxo} \text{ de calor} \\ \text{que sai} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{taxa} \text{ de calor} \\ \text{gerado dentro} \\ \text{do sistema} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{taxa} \text{ de trabalho} \\ \text{realizado sobre o} \\ \text{sistema} \end{pmatrix}$$

Capacitância

$$\overbrace{\underbrace{\rho V}_{m} c_p}^{C} \frac{d\theta}{dt} = q_{in} - q_{out} + q_g + \frac{d\tau}{dt}$$

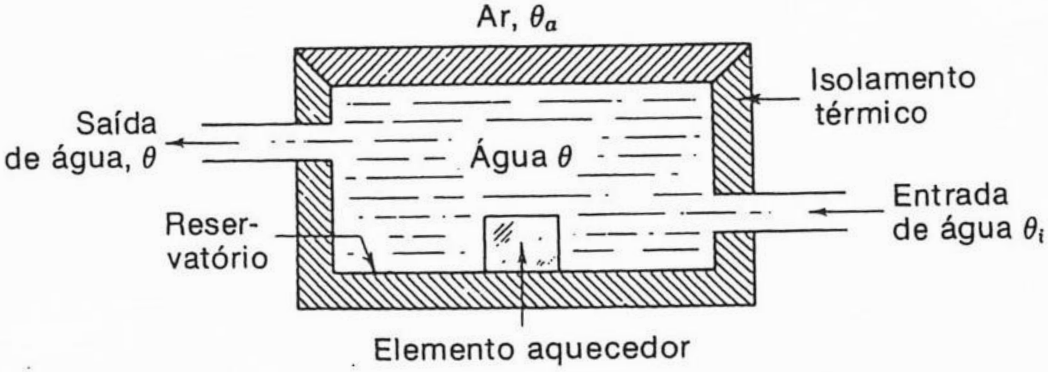
Obs.: válido se houver distribuição uniforme de temperatura no sistema: $\theta(x,y,z,t) = \theta(t)$ } *c_p e ρ são uniformes*

Exercício para casa:

Sistema simples de transferência de calor

O aquecedor elétrico de água utilizado em muitas residências para o fornecimento de água quente é um bom exemplo de problema simples de transferência de calor. Na Fig. é mostrado o esboço de um aquecedor. O recipiente é isolado termicamente com a finalidade de reduzir as perdas para o ar do meio ambiente. O elemento elétrico de aquecimento é ligado e desligado por intermédio de um interruptor termostático, a fim de manter uma temperatura de referência. O consumo de uma torneira qualquer da casa acarreta a saída de água quente e a entrada de água fria no recipiente. Serão feitas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. Não há armazenamento de calor no isolamento. Isto é válido desde que o calor específico do isolamento e a variação da temperatura da água sejam pequenos.
2. Toda a água no interior do recipiente se encontra à mesma temperatura. Isto requer uma perfeita homogeneidade da água.



Dados e hipóteses para o ex. anterior

$\dot{m} \rightarrow$ fluxo de massa pelo aquecedor (igual na entrada e na saída)

$c_p \rightarrow$ calor específico da água

$M \rightarrow$ massa de água no aquecedor

$C_t \rightarrow$ Capacitância térmica da câmara

$q \rightarrow$ fluxo de calor gerado pela resistência elétrica

$\mathrm{R} \rightarrow$ resistência térmica da água

- Admitir ainda que uma variação súbita na temperatura de entrada provoca uma variação instantânea no fluxo de calor gerado na resistência elétrica e uma variação instantânea na temperatura de saída
- Resolva o exercício usando a primeira lei da termodinâmica.
- Resolva o exercício usando as duas analogias com a eletricidade:
  - Apresente o circuito térmico equivalente
  - Apresente o circuito elétrico equivalente em ambos os casos
  - Deduza as equações por analogia
  - Apresente a função de transferência:
    - Entre a temperatura de saída e a temperatura de entrada
    - Entre a temperatura de saída e o fluxo de calor produzido na resistência elétrica