MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Modelo de demonstrações envolvendo ínfimos e supremos

O intuito deste texto é dar para vocês algum material que sirva de modelo para provar supremos, ínfimos, majorantes, minorantes,...

Antes de partir para os exemplos, vamos revisar alguns conceitos.

Definição. Dado K um corpo ordenado e $A \subseteq K$. Dizemos que $s \in K$ é **supremo** de A se for o menor majorante de A, ou seja, se satisfizer as seguintes propriedades:

- $s \geq a, \forall a \in A$ (**s é majorante**)
- Se $M \in K$ é tal que $M \geq a$, $\forall a \in A$, então $s \leq M$ (**s é o menor majorante**)

De forma simétrica, dizemos que i é **ínfimo** de A se for o maior minorante de A, ou seja, se:

- $i \leq a, \forall a \in A$ (**i é minorante**)
- Se $m \in K$ é tal que $m \leq a$, $\forall a \in A$, então $i \geq m$ (**i é o maior minorante**)

Observações:.

1. Um supremo (ou ínfimo) de um conjunto não necessariamente existe.
2. Mesmo se existir um supremo (ou ínfimo), ele não precisa pertencer a A (veremos nos exemplos).
3. Se existir, o supremo (ou ínfimo) é único (veja o ex. 5 da Lista 2). Por causa disso, podemos denotar o supremo de A como $\sup A$ (o ínfimo de A por $\inf A$).

Proposição 1. *Dado $A \subseteq K$, são equivalentes:*

1. *$s \in K$ é o supremo de A.*
2. *$s \in K$ satisfaz as seguintes propriedades:*
   (a) *$s \geq a, \forall a \in A$*
   (b) *Dado $x \in K$ que verifica $x < s$, existe $a \in A$ tal que $x < a \leqslant s$*
3. *$s \in K$ satisfaz as seguintes propriedades:*
   (a) *$s \geq a, \forall a \in A$*
   (b) *Dado $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $s - \epsilon < a \leqslant s$*

Prova. Primeiro, mostremos que *1.* implica *2.* Se $s = \sup A$, s é um majorante de A, então *2(a)* já é satisfeita. Agora, dado $x < s$, x não pode ser um majorante de A, porque se fosse, teria de verificar $x \geqslant s$, pela definição de supremo. Logo, tem que existir $a \in A$ tal que $x < a$, pois, do contrário, teríamos que $x \geqslant a$ para todo $a \in A$, donde sairia que x é majorante de A, uma contradição. Note que já temos que $a \leqslant s$ pelo item *2.(a)*, então $x < a \leqslant s$.

Agora, *2.* implica *3.* De fato, a condição *2.(a)* é mantida em *3.(a)*. E ainda, se $\epsilon > 0$, então $-\epsilon < 0$, e $s - \epsilon < s$. Aplicando *2.(b)*, temos que existe $a \in A$ tal que $s - \epsilon < a \leqslant s$.

Finalmente, se *3.* vale, temos *1.* Já sabemos que *3.(a)* mostra que s é majorante de A. Agora, seja M um outro majorante de A e suponha por absurdo que $M < s$. Tome então $\epsilon = s - M > 0$. Temos por *3.(b)* que existe a em A tal que $M = s - (s - M) = s - \epsilon < a \leqslant s$. Mas se $M < a$, com $a \in A$, M não é majorante de A. Absurdo! Logo, $M \geq s$, o que mostra que s é de fato o menor majorante de A.

$\square$

Proposição 2. *Dado $A \subseteq K$, são equivalentes:*

1. *$i \in K$ é o ínfimo de A.*
2. *$i \in K$ satisfaz as seguintes propriedades:*
   (a) $i \leq a, \forall a \in A$
   (b) *Dado $x \in K$ que verifica $x > i$, existe $a \in A$ tal que $i \leqslant a < x$*
3. *$i \in K$ satisfaz as seguintes propriedades:*
   (a) $i \leq a, \forall a \in A$
   (b) *Dado $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $i \leqslant a < i + \epsilon$*

Prova. Análogo ao anterior.

$\square$

Agora é mão na massa!

Exemplo 1. *Seja $I = (a,b) := \{x \in K : a < x < b\}$, $a < b$, um intervalo aberto em K (K pode ser $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,...). Temos que $\sup I = b$ e $\inf I = a$.*

Prova. Vamos provar o supremo usando a equivalência *2.* da Proposição 1 (provar o ínfimo fica como exercício).

Verificamos primeiramente *2.(a)*, isto é, que b é majorante de I. De fato, se $x \in I$, temos que $x < b$ por definição, então segue que $b \geq x \ \forall x \in I$.

Agora, seja dado $y < b$. Queremos encontrar $x \in I$ tal que $y < x$. Se $y < a$, qualquer x no intervalo satisfaz a condição desejada (pegue $\frac{a+b}{2}$, por exemplo). Por outro lado, se $a \leq x$, tome $x = \frac{y+b}{2}$. Temos nesse caso que $y < x < b$ (verifique usando os axiomas de corpo ordenado), e como $a \leq x$, segue também que $x \in I$. Assim, provamos *2.(b)*, e temos que $\sup I = b$.

$\square$

Exemplo 2. *Seja* $A := \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. *Temos que* $\inf A = 0$.

Prova. Vamos usar a equivalência *3.* da Proposição 2. Primeiramente, observamos que, se $n \in \mathbb{N}$, então $n > 0$, e isso implica que $\frac{1}{n} > 0$ (se tivéssemos $\frac{1}{n} \leq 0$, teríamos $1 = n \cdot \dfrac{1}{n} \leq 0$, mas sabemos que $1 > 0$). Isso já mostra que 0 é um minorante de A.

Agora, seja $\epsilon > 0$. Pela Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Como $\frac{1}{n_0} \in A$, verificamos então que existe $x \in A$ (no caso, $x = \frac{1}{n_0}$) tal que $0 < x < \epsilon$. Isso conclui a prova de que $0 = \inf A$.

$\square$

Definição. Se K é um corpo ordenado e $A \subseteq K$, dizemos que $M \in A$ é o **máximo** de A se for um majorante de A que pertence a A. $m \in A$ é dito **mínimo** de A se for um minorante de A que pertence a A.

Observações:.

1. O máximo e o mínimo, quando existem, são únicos, e denotamos, respectivamente, por $\max A$ e $\min A$.

2. Quando existem máximo e/ou mínimo, $\max A = \sup A$ e $\min A = \inf A$ (ex. 7 da lista 2).

Exemplo 3. *Se* $B = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $\sup B = \frac{1}{2}$ *e* $\inf B = -1$.

Prova. Provaremos que, mais do que supremo e ínfimo, $\frac{1}{2}$ e -1 são o máximo e mínimo de B, respectivamente. Note que, se $m \leq n$, então $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$ (verifique usando os axiomas de corpo ordenado). Chamaremos esse fato de (*).

Provemos que $\min B = -1$. Por (*), temos que:

$$\frac{1}{n} \leq 1,\ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{n},\ \forall n \geq 1$$

Daí, temos que, se n é par, $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} > 0$, donde já sai que $-1 < \frac{(-1)^n}{n}$. Se n é ímpar, então $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$, mas já mostramos que $-1 \leq -\frac{1}{n}$, então verificamos que -1 é menor ou igual a todo elemento de B. Além disso, $-1 = \frac{(-1)^1}{1} \in B$, então $-1 = \min B$.

A prova do máximo vou deixar para vocês :).

□

Observações:. Alguém poderia associar o conceito do supremo e ínfimo com a ideia de "pegar limites" no conjunto (expressão essa que ainda não está bem definida neste curso). No Exemplo 2, por exemplo, o aluno poderia achar que o ínfimo de A é 0 porque 0 é o limite da sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ quando n tende ao infinito. Mas o Exemplo 3 mostra que, apesar de haver alguma relação entre esses conceitos, supremo e limite são coisas diferentes: a sequência $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite 0 mas $\sup B = \frac{1}{2}$ e $\inf B = -1$. Sequências ainda serão vistas em mais detalhe no futuro.