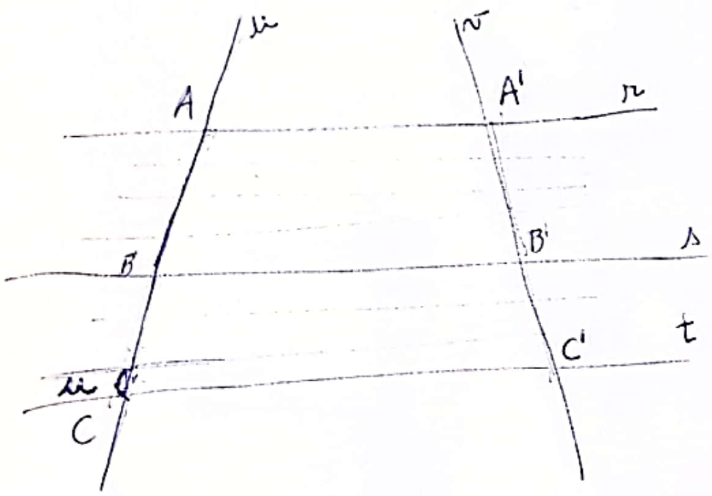
Aula 8 - 28/09/2020

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}$$

Exemplos de Frações Continuadas



T. Tales

Se r, s e t são retas paralelas e as retas u e v são transversais que determinam com as anteriores segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$. Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

A demonstração no caso em que $AB = n u$ e $BC = m u$, sendo $\underline{u}$ uma unidade, $m, n \in \mathbb{N}$ é simples.

Ela fica mais difícil quando os segmentos AB e BC não têm unidade comum $\left(\Leftrightarrow \frac{AB}{BC} \notin \mathbb{Q}\right)$

Lista 1

" Se n divide a^2 então n divide a"

é falso!

EX. $\begin{cases} 4 \mid 36 & (4 \text{ divide } 36) \\ 4 \text{ não divide } 6 \end{cases}$

Se p é primo e p divide a^2 então p divide a.

Não existe racional r tal que $r^2 = p$ (p primo) ($p > 0$)

$(\sqrt{p} \notin \mathbb{Q})$

Suponha que $\underbrace{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}}_{a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = p$.

→ Podemos supor $a, b > 0$

$$a^2 = p b^2 \quad (*)$$

Pelo T.F. da Aritmética, existem primos $p_1, p_2, \dots, p_k$ e $q_1, q_2, \dots, q_m$

tais que $\begin{cases} a = p_1 p_2 \cdots p_k & (>0) \\ b = q_1 q_2 \cdots q_m & (>0) \end{cases}$

---

obs: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ ←

$18 = 2 \cdot 3^2$ → $\begin{cases} a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}, & p_1 \neq p_2 \\ b = q_1^{j_1} q_2^{j_2} \cdots q_m^{j_m}, & q_1 \neq q_2 \end{cases}$

Substituindo a e b em (*):

$$(p_1 p_2 \cdots p_k)^2 = p\,(q_1 q_2 \cdots q_m)^2$$

$$\underbrace{p_1^2 p_2^2 \cdots p_k^2}_{\substack{0,2,4,\ldots \\ \text{fatores iguais a } p}} \underset{(1)}{=} \underbrace{p \cdot q_1^2 q_2^2 \cdots q_m^2}_{1,3,5,\ldots} = X$$

quantidade par de fatores p

quantidade ímpar de fatores iguais a p.

A unicidade da fatoração de x garantida pelo T. F. da Aritmética permite concluir que a igualdade (1) é falsa.

$\Rightarrow$ Não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal $r^2 = p$.

Questão 6 b $\qquad 2^n < n!, \quad \forall n \geq 4$

Passo 1: $2^4 = 16$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $\Big\}$ $2^4 < 4!$ V é verdadeiro.

Passo 2. Suponha $2^k < k!$ (*)

Vamos provar que vale para $n = k+1$:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \underset{(*)}{<} \underbrace{k! \cdot 2} \underset{k \geq 4}{<} (k+1)!$$

Portanto, pelo Princípio de indução.

$2^n < n!$ para $n \geq 4$.

④ $\sqrt[3]{p} \notin \mathbb{Q}$.

$\sqrt[3]{-7} \notin \mathbb{Q}$

Suponha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tq $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = -7$

$$a^3 = -7b^3$$

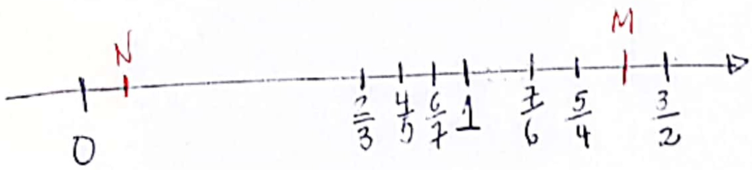
Podemos supor $b > 0$ e $a < 0$

Lista 2

9b) $B = \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$= \left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

$$\frac{n+(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & \text{se } n \text{ for par} \\ \frac{n-1}{n}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$



máximo de $A = \frac{3}{2}$.

mínimo de $A = 0$.

Dem: ($\frac{3}{2} \in A$: basta tomar $n = 2$)

$$\frac{3}{2} \geq \frac{n+(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+1}{n}, \quad \forall n.$$

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\begin{array}{c} -1 \leq 1 \\ n-1 \leq n+1 \\ \frac{n-1}{n} \leq \frac{n+1}{n} \end{array} \right)$$

(5).

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2}, \quad \underline{\forall n \geq 2}$$

$n \geq 0$: $\quad n+1 \leq \frac{3}{2} n$

$\iff 2(n+1) \leq 3n$

$\iff \underbrace{2n+2 \leq 3n}$. $= 2n+n$.

$\iff \underline{n \geq 2}$

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2}, \quad \forall n \geq 2$$

se $n=1$: $\quad \frac{n+(-1)^n}{n} = 0 < \frac{3}{2}$ ||

Logo, $\quad \frac{3}{2} \geq \frac{n+(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

---

0 é mínimo de A.

- $0 \in A$ ✓ $(n=1)$
- $0 \leq \frac{n+(-1)^n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$n > 1$: $\quad n+(-1)^n \geq n-1 > 0$ pois $n>1$

Logo $\frac{n+(-1)^n}{n} > 0$, se $n > 1$.

Portanto $0 = \min A$.

$\frac{3}{2} = \sup B$

(a) $\frac{3}{2} \geq \frac{n+(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (já provamos)

$\frac{3}{2}$ é majorante de B

(b) Seja $M < \frac{3}{2}$, M não pode ser majorante de B

porque $\frac{3}{2} \in B$.

$0 = \inf B$

(a) $0 \leq b$, $\forall b \in B$ (já provado)
isto é, 0 é minorante de B

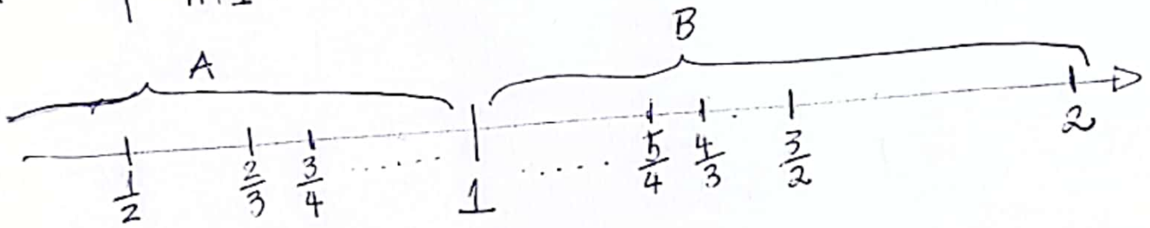
(b) $\hookrightarrow$ 0 é o maior minorante de B.

Se $N > 0$, N não pode ser minorante de B

pois $\underline{0 \in B}$

Exercício 12 – Lista 2

$A = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ $\qquad$ $B = \left\{ \overset{= 1 + \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$



(a) $a \leq b$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$

$a = \frac{n}{n+1}$, para algum $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a < 1$, $\forall a \in A$

$b = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$b = \frac{n+1}{n} > 1$ $\Rightarrow$ $b > 1$, $\forall b \in B$.

Logo, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$:
$a < 1 < b$ $\Rightarrow$ $(a < b)$

---

ou $\quad b - a \geq 0$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

$$\left(\frac{n+1}{n} - \frac{j}{j+1} \right) = \frac{(n+1)(j+1) - nj}{n(j+1)} = \frac{\cancel{nj} + \overbrace{n+j+1}^{>0} - \cancel{nj}}{n(j+1)} > 0$$

(b) $\sup A = 1$

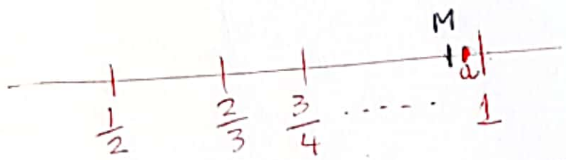
~~(i)~~:

(i) 1 é majorante de A:

Mas $\frac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo 1 é maj. de A.

(ii) 1 é o menor dos majorantes



seja $M < 1$ $\quad (M > \frac{1}{2})$

$1 - M > 0$

Prop Arq.

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot (1-M) > 1$

$1 - M > \frac{1}{n}$

$\underbrace{1 - \frac{1}{n}}$ $> M$

$\frac{n-1}{n} > M$

$n = k+1$

$\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\in A} > M$

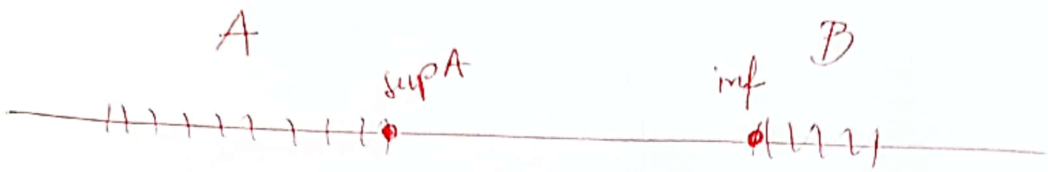
$\Rightarrow M$ não é majorante de A

$\Rightarrow 1$ é o menor dos majorantes de A

inf $B = 1$

Para Casa

Comentário sobre o Ex 13 da lista 2

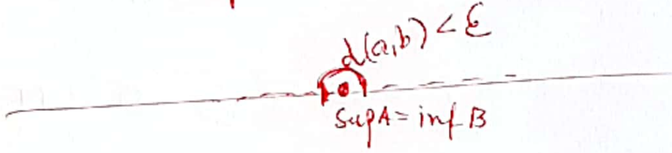


$\forall a \in A$, $\forall b \in M$

$a \leq b$,

$\Rightarrow$ $\sup A \leq \inf B$

Se $\sup A = \inf B$



$\forall \ \underline{\varepsilon > 0}$ (ε pequeno) existem $a \in A$ e $b \in B$

tq $|b-a| < \varepsilon$

(é possível encontrar a e b tão próximos quanto se queira)